ECONOMETRÍA

EJERCICIO 3 - RESUELTO

EN ESTE EJERCICIO SE ILUSTRAN LAS FÓRMULAS Y LOS CÁLCULOS ASOCIADOS CON LA ESTIMACIÓN, EL CONTRASTE DE HIPÓTESIS Y LA PREVISIÓN EN MODELOS DE REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE. ES MUY IMPORTANTE ESTUDIARLO CON ATENCIÓN Y COMPROBAR Y REPRODUCIR A MANO Y CON EVIEWS TODOS LOS CÁLCULOS NUMÉRICOS. LOS DATOS UTILIZADOS SE ENCUENTRAN EN EL ARCHIVO NUM01-RLM.WF1.

En la Sección 13 de la guía *Introducción al Uso de EViews 4.1* se dan algunas indicaciones sobre cómo llevar a cabo con EViews las operaciones necesarias para responder a todas las preguntas de este ejercicio.

ENUNCIADO

Pregunta 1:

[A] Calcular $\hat{\beta}_1$, $\hat{\beta}_2$, $\hat{\beta}_3$, R^2 y $\bar{R}^2$ en el modelo de regresión lineal múltiple

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3 + U \qquad \text{[M1]}$$

con los datos de la tabla siguiente:

$\mathbf{y}$	$\mathbf{x}_2$	$\mathbf{x}_3$	$\mathbf{x}_4$
10	3	5	2
2	1	4	3
16	5	6	3
7	2	4	1
12	4	6	1

[B] Calcular $\hat{\beta}_2$ y $\hat{\beta}_4$ en el modelo de regresión lineal múltiple

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + \beta_4 X_4 + U \qquad \text{[M2]}$$

con los datos de la tabla anterior. Comprobar que $\hat{\beta}_2$ en la RLM [M2] coincide con la pendiente estimada en la RLS de Y sobre X_2, y que $\hat{\beta}_4$ en la RLM [M2] coincide con la pendiente estimada en la RLS de Y sobre X_4. Explicar estas dos coincidencias.

Observación: La mayor parte de los resultados numéricos que figuran en la solución de este ejercicio se han calculado con EViews. Si los cálculos se hacen a mano (con una calculadora) empleando sólo unos pocos decimales, los resultados pueden variar algo.

Pregunta 2:

Calcular $\hat{\sigma}^2$ y $\widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{W}}]$ en el modelo de regresión lineal múltiple [M1] de la parte [A] de la Pregunta 1. Escribir un resumen del modelo [M1] estimado.

Las Preguntas 3 a 10 se refieren todas al modelo M1

Pregunta 3:

Realizar los tres contrastes de hipótesis siguientes, utilizando el estadístico F general:

[A] $H_0: \beta_2 = 10\beta_3$; $H_1: \beta_2 \neq 10\beta_3$.

[B] $H_0: 2\beta_1 + 2\beta_2 - 7\beta_3 = 50$; $H_1: 2\beta_1 + 2\beta_2 - 7\beta_3 \neq 50$.

[C] $H_0: \begin{bmatrix} \beta_2 \\ 2\beta_1 + 2\beta_2 - 7\beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\beta_3 \\ 50 \end{bmatrix}$; $H_1: \begin{bmatrix} \beta_2 \\ 2\beta_1 + 2\beta_2 - 7\beta_3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 10\beta_3 \\ 50 \end{bmatrix}$.

Pregunta 4:

Calcular el estadístico F para el contraste [A] de la Pregunta 3 a partir de las sumas de cuadrados de residuos no restringida y restringida bajo H_0.

Pregunta 5:

Contrastar la significación global del modelo [M1] calculando el estadístico F correspondiente de dos formas alternativas.

Pregunta 6:

Realizar los contrastes [A] y [B] de la Pregunta 3 utilizando un estadístico t en cada caso.

Pregunta 7:

Contrastar [A] $H_0: \beta_2 = 10\beta_3$, y [B] $H_0: 2\beta_1 + 2\beta_2 - 7\beta_3 = 50$, frente a una alternativa de tipo $<$ y frente a una alternativa de tipo $>$ en cada caso.

Pregunta 8:

Contrastar la significación individual de cada parámetro en el modelo [M1].

Pregunta 9:

Calcular un intervalo de confianza del 95% para $\beta_2 - 10\beta_3$, para β_2, y para β_3.

Pregunta 10:

Calcular una previsión puntual y un intervalo de confianza del 95% para Y_f tomando como valores dados para X_{f2} y X_{f3} 11 y 1, respectivamente. Con estos mismos valores para las variables explicativas, estimar $\Pr[Y_f \geq 50]$ y $\Pr[Y_f \leq 100]$.

SOLUCIÓN

	DATOS ORIGINALES				DATOS EN DESVIACIONES			
	Y	X2	X3	X4	YM	X2M	X3M	X4M
1	10.0	3.0	5.0	2.0	0.6	0.0	0.0	0.0
2	2.0	1.0	4.0	3.0	−7.4	−2.0	−1.0	1.0
3	16.0	5.0	6.0	3.0	6.6	2.0	1.0	1.0
4	7.0	2.0	4.0	1.0	−2.4	−1.0	−1.0	−1.0
5	12.0	4.0	6.0	1.0	2.6	1.0	1.0	−1.0
SUMA	47.0	15.0	25.0	10.0	0.0	0.0	0.0	0.0
MEDIA	9.4	3.0	5.0	2.0	0.0	0.0	0.0	0.0

SUMAS DE PRODUCTOS DE DATOS ORIGINALES				
	Y	X2	X3	X4
Y	553	174	254	93
X2	174	55	81	30
X3	254	81	129	50
X4	93	30	50	24

SUMAS DE PRODUCTOS DE DATOS EN DESVIACIONES				
	YM	X2M	X3M	X4M
YM	111.2	33.0	19.0	−1.0
X2M	33.0	10.0	6.0	0.0
X3M	19.0	6.0	4.0	0.0
X4M	−1.0	0.0	0.0	4.0

VARIANZAS Y COVARIANZAS MUESTRALES				
	Y	X2	X3	X4
Y	22.24	6.60	3.80	−0.20
X2	6.60	2.00	1.20	0.00
X3	3.80	1.20	0.80	0.00
X4	−0.20	0.00	0.00	0.80

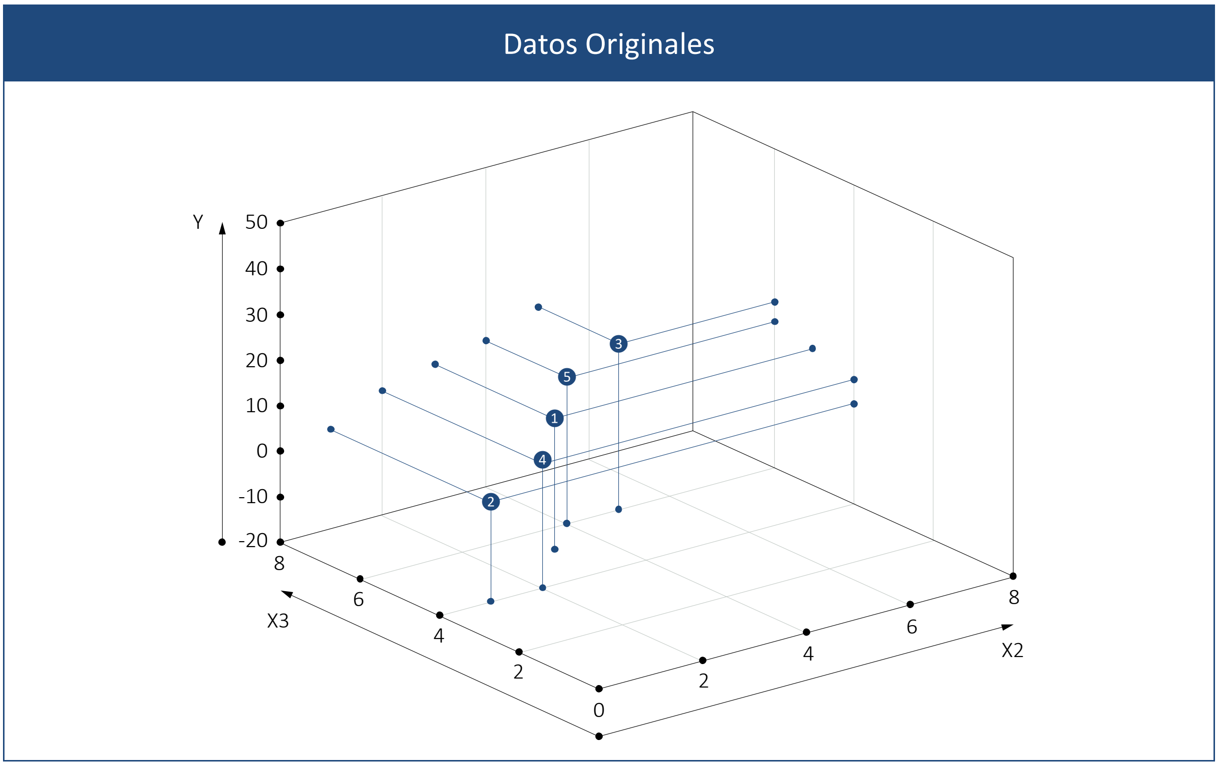
Pregunta 1 [A] - Cálculos con Datos Originales:

En el modelo [M1] (RLM, $K = 3$) con los datos originales del enunciado:

$$\underset{3\times1}{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \quad \underset{5\times1}{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 16 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \underset{5\times3}{\mathbf{X}} = [\mathbf{i}, \mathbf{x}_2\,, \mathbf{x}_3\,] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}. \qquad [1]$$

$$\underset{3\times3}{\mathbf{X}'\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^{N} x_{i2} & \sum_{i=1}^{N} x_{i3} \\ \sum_{i=1}^{N} x_{i2} & \sum_{i=1}^{N} x_{i2}^2 & \sum_{i=1}^{N} x_{i2}x_{i3} \\ \sum_{i=1}^{N} x_{i3} & \sum_{i=1}^{N} x_{i3}x_{i2} & \sum_{i=1}^{N} x_{i3}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 15 & 25 \\ 15 & 55 & 81 \\ 25 & 81 & 129 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{3\times3}{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}} = \begin{bmatrix} 26.7 & 4.5 & -8.0 \\ 4.5 & 1.0 & -1.5 \\ -8.0 & -1.5 & 2.5 \end{bmatrix}. \quad \underset{3\times1}{\mathbf{X}'\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N} y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_{i2}y_i \\ \sum_{i=1}^{N} x_{i3}y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 47 \\ 174 \\ 254 \end{bmatrix}. \qquad [2]$$



$$\underset{3\times1}{\hat{\boldsymbol{\beta}}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}}_{3\times3} \underbrace{\mathbf{X}'\mathbf{y}}_{3\times1} = \begin{bmatrix} 26.7 & 4.5 & -8.0 \\ 4.5 & 1.0 & -1.5 \\ -8.0 & -1.5 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 47 \\ 174 \\ 254 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.9 \\ 4.5 \\ -2.0 \end{bmatrix}. \qquad [3]$$

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.9 \\ 4.5 \\ -2.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9.4 \\ 2.4 \\ 16.4 \\ 6.9 \\ 11.9 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 16 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 9.4 \\ 2.4 \\ 16.4 \\ 6.9 \\ 11.9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.4 \\ -0.4 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}. \qquad [4]$$

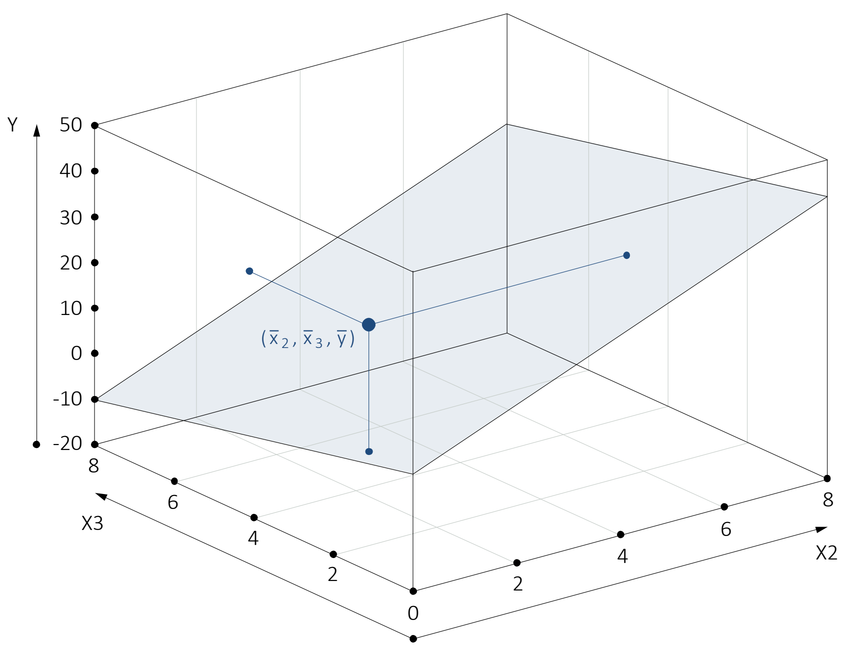
Cada valor ajustado puede calcularse como $\hat{y}_i = 5.9 + 4.5x_{i2} - 2.0x_{i3}$. Cada residuo puede calcularse como $\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (5.9 + 4.5x_{i2} - 2.0x_{i3})$ $(i = 1, ..., 5)$.

La ortogonalidad entre variables explicativas y residuos MCO $(\mathbf{X}'\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0})$ implica que $\sum_{i=1}^{5} \hat{u}_i = 0$, $\mathbf{x}_2'\hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{5} x_{i2}\hat{u}_i = 0$ y $\mathbf{x}_3'\hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{5} x_{i3}\hat{u}_i = 0$; la ortogonalidad entre valores ajustados y residuos MCO implica que $\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{5} \hat{y}_i\hat{u}_i = 0$.

Como el modelo tiene término constante, $\sum_{i=1}^{5} y_i = \sum_{i=1}^{5} \hat{y}_i = 47$, por lo que $\bar{y} = \bar{\hat{y}} = 9.4$. Además, $\bar{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2\bar{x}_2 + \hat{\beta}_3\bar{x}_3 \Rightarrow 9.4 = 5.9 + 4.5 \times 3.0 - 2.0 \times 5.0$ [el plano de regresión estimado pasa por el punto $(\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{y}) = (3.0, 5.0, 9.4)$].

La relación $\mathbf{y}'\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$ puede comprobarse en este caso teniendo en cuenta que $\mathbf{y}'\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{5} y_i^2 = 553$, $\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^{5} \hat{y}_i^2 = 552.3$, y $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^{5} \hat{u}_i^2 = 0.7$.

Modelo Estimado y Medias Muestrales



$$\text{SCT} = \sum_{i=1}^{N} (y_i - \bar{y})^2 = \mathbf{y}'\mathbf{y} - N\bar{y}^2 = 553 - 5 \times 9.4^2 = 111.2. \qquad [5]$$

$$\text{SCE} = \sum_{i=1}^{N} (\hat{y}_i - \bar{\hat{y}})^2 = \hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} - N\bar{\hat{y}}^2 = 552.3 - 5 \times 9.4^2 = 110.5. \qquad [6]$$

$$\begin{aligned} \text{SCR} &= \sum_{i=1}^{N} \hat{u}_i^2 = \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = 0.7 \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} = 553 - 552.3 = 0.7 \qquad [7] \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} = 553 - [5.9, 4.5, -2.0] \begin{bmatrix} 47 \\ 174 \\ 254 \end{bmatrix} = 0.7. \end{aligned}$$

Como el modelo tiene término constante, SCT = SCE + SCR. En este caso, la SCR puede calcularse simplemente como SCR = SCT – SCE = 111.2 – 110.5 = 0.7.

$$R^2_{\text{NC}} = \frac{\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}}}{\mathbf{y}'\mathbf{y}} = \frac{552.3}{553} = 1 - \frac{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}}{\mathbf{y}'\mathbf{y}} = 1 - \frac{0.7}{553} = 0.9987.$$

$$R^2 = \widehat{\text{corr}}[\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{y}]^2 = \frac{22.1^2}{22.1 \times 22.24} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TÉRMINO CONSTANTE}}}{=} \frac{\text{SCE}}{\text{SCT}} = \frac{110.5}{111.2} = 1 - \frac{\text{SCR}}{\text{SCT}} = 1 - \frac{0.7}{111.2} = 0.9937. \qquad [8]$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\frac{\text{SCR}}{N-K}}{\frac{\text{SCT}}{N-1}} = 1 - \frac{\frac{0.7}{5-3}}{\frac{111.2}{5-1}} = 1 - \frac{(N-1)(1-R^2)}{N-K} = 1 - \frac{(5-1)(1-0.9937)}{5-3} = 0.9874. \qquad [9]$$

Pregunta 1 [A] - Cálculos con Datos en Desviaciones con Respecto a la Media:

$\bar{y} = 9.4\,,\ \bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_2\,, \bar{x}_3\,]' = [3.0, 5.0]'\,.$

$$\underset{2\times 1}{\boldsymbol{\beta}_{\mathrm{b}}} = \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}, \quad \underset{5\times 1}{\tilde{\mathbf{y}}} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -7.4 \\ 6.6 \\ -2.4 \\ 2.6 \end{bmatrix}, \quad \underset{5\times 2}{\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}} = [\tilde{\mathbf{x}}_2\,, \tilde{\mathbf{x}}_3\,] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}. \qquad [1']$$

$$\underset{2\times 2}{\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}'\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N}(x_{i2}-\bar{x}_2\,)^2 & \sum_{i=1}^{N}(x_{i2}-\bar{x}_2\,)(x_{i3}-\bar{x}_3\,) \\ \sum_{i=1}^{N}(x_{i3}-\bar{x}_3\,)(x_{i2}-\bar{x}_2\,) & \sum_{i=1}^{N}(x_{i3}-\bar{x}_3\,)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$[2']$$

$$\Rightarrow \underset{2\times 2}{(\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}'\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}\,)^{-1}} = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.5 \\ -1.5 & 2.5 \end{bmatrix}. \quad \underset{2\times 1}{\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}'\tilde{\mathbf{y}}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N}(x_{i2}-\bar{x}_2\,)(y_i-\bar{y}\,) \\ \sum_{i=1}^{N}(x_{i3}-\bar{x}_3\,)(y_i-\bar{y}\,) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ 19 \end{bmatrix}.$$

Observación: $(\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}'\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}\,)^{-1}$ en $[2']$ coincide con la matriz formada por las dos últimas filas y las dos últimas columnas de $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ en [2]. ■

$$\underset{2\times 1}{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{b}}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{(\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}'\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}\,)^{-1}}_{2\times 2}\ \underbrace{\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}'\tilde{\mathbf{y}}}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.5 \\ -1.5 & 2.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 33 \\ 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ -2.0 \end{bmatrix},$$

$$[3']$$

$$\hat{\beta}_1 = \bar{y} - \bar{\mathbf{x}}'\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{b}} = 9.4 - [3.0, 5.0]\begin{bmatrix} 4.5 \\ -2.0 \end{bmatrix} = 5.9.$$

Observación: Las estimaciones obtenidas en $[3']$ son idénticas a las obtenidas en [3]. Por otro lado, el vector $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{b}}$ en el modelo RLM [M1] también puede calcularse como

$$\underset{2\times 1}{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{b}}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathrm{var}}[\mathbf{x}_2\,] & \widehat{\mathrm{cov}}[\mathbf{x}_2\,, \mathbf{x}_3\,] \\ \widehat{\mathrm{cov}}[\mathbf{x}_3\,, \mathbf{x}_2\,] & \widehat{\mathrm{var}}[\mathbf{x}_3\,] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{\mathrm{cov}}[\mathbf{x}_2\,, \mathbf{y}] \\ \widehat{\mathrm{cov}}[\mathbf{x}_3\,, \mathbf{y}] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2.0 & 1.2 \\ 1.2 & 0.8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6.6 \\ 3.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5.0 & -7.5 \\ -7.5 & 12.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6.6 \\ 3.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ -2.0 \end{bmatrix}.$$

■

$$\hat{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -7.4 \\ 6.6 \\ -2.4 \\ 2.6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4.5 \\ -2.0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -7.4 \\ 6.6 \\ -2.4 \\ 2.6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0 \\ -7.0 \\ 7.0 \\ -2.5 \\ 2.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.4 \\ -0.4 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}. \qquad [4']$$

$$\mathrm{SCE} = \hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{b}}'\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}'\tilde{\mathbf{y}} = [4.5, -2.0]\begin{bmatrix} 33 \\ 19 \end{bmatrix} = 110.5. \qquad [6']$$

Observación: La SCT se calcula igual que en [5]. La SCR se calcula como la diferencia entre SCT y SCE. Por último, R^2 y $\bar{R}^2$ se calculan igual que en [8]-[9].

Pregunta 1 [A] - Cálculos Individuales Referidos a β_2 y β_3:

En el modelo RLM [M1]:

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\hat{\mathbf{r}}_2'\tilde{\mathbf{y}}}{\hat{\mathbf{r}}_2'\hat{\mathbf{r}}_2}, \quad \hat{\beta}_3 = \frac{\hat{\mathbf{r}}_3'\tilde{\mathbf{y}}}{\hat{\mathbf{r}}_3'\hat{\mathbf{r}}_3}, \qquad [10]$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc} \text{RLM} & & \text{RLS Y X2} & & \text{RLS X3 X2} & & \text{RLM} & \text{RLM} & & \text{RLS Y X3} & & \text{RLS X2 X3} & & \text{RLM} \\ \hat{\beta}_2 & = & \frac{\tilde{\mathbf{x}}_2'\tilde{\mathbf{y}}}{\tilde{\mathbf{x}}_2'\tilde{\mathbf{x}}_2} & - & \frac{\tilde{\mathbf{x}}_2'\tilde{\mathbf{x}}_3}{\tilde{\mathbf{x}}_2'\tilde{\mathbf{x}}_2} & \times & \hat{\beta}_3, & \hat{\beta}_3 & = & \frac{\tilde{\mathbf{x}}_3'\tilde{\mathbf{y}}}{\tilde{\mathbf{x}}_3'\tilde{\mathbf{x}}_3} & - & \frac{\tilde{\mathbf{x}}_3'\tilde{\mathbf{x}}_2}{\tilde{\mathbf{x}}_3'\tilde{\mathbf{x}}_3} & \times & \hat{\beta}_2, \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\ \hat{\mathbf{u}} & = & \hat{\mathbf{u}}_{\bar{3}} & - & \hat{\mathbf{r}}_3 & \times & \hat{\beta}_3, & \hat{\mathbf{u}} & = & \hat{\mathbf{u}}_{\bar{2}} & - & \hat{\mathbf{r}}_2 & \times & \hat{\beta}_2. \end{array} \qquad [11]$$

Con respecto a [10], la pendiente estimada y los residuos en la RLS de X_2 sobre X_3 son

$$\frac{\tilde{\mathbf{x}}_3'\tilde{\mathbf{x}}_2}{\tilde{\mathbf{x}}_3'\tilde{\mathbf{x}}_3} = \frac{6.0}{4.0} = \frac{\widehat{\text{cov}}[\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2]}{\widehat{\text{var}}[\mathbf{x}_3]} = \frac{1.2}{0.8} = 1.5,$$

$$\hat{\mathbf{r}}_2 = \tilde{\mathbf{x}}_2 - \tilde{\mathbf{x}}_3 \times \frac{\tilde{\mathbf{x}}_3'\tilde{\mathbf{x}}_2}{\tilde{\mathbf{x}}_3'\tilde{\mathbf{x}}_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times 1.5 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix},$$

mientras que la pendiente estimada y los residuos en la RLS de X_3 sobre X_2 son

$$\frac{\tilde{\mathbf{x}}_2'\tilde{\mathbf{x}}_3}{\tilde{\mathbf{x}}_2'\tilde{\mathbf{x}}_2} = \frac{6.0}{10.0} = \frac{\widehat{\text{cov}}[\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3]}{\widehat{\text{var}}[\mathbf{x}_2]} = \frac{1.2}{2.0} = 0.6,$$

$$\hat{\mathbf{r}}_3 = \tilde{\mathbf{x}}_3 - \tilde{\mathbf{x}}_2 \times \frac{\tilde{\mathbf{x}}_2'\tilde{\mathbf{x}}_3}{\tilde{\mathbf{x}}_2'\tilde{\mathbf{x}}_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times 0.6 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.2 \\ -0.2 \\ -0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, en [10],

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\hat{\mathbf{r}}_2'\tilde{\mathbf{y}}}{\hat{\mathbf{r}}_2'\hat{\mathbf{r}}_2} = \frac{4.5}{1.0} = 4.5, \quad \hat{\beta}_3 = \frac{\hat{\mathbf{r}}_3'\tilde{\mathbf{y}}}{\hat{\mathbf{r}}_3'\hat{\mathbf{r}}_3} = \frac{-0.8}{0.4} = -2.0.$$

que son las mismas estimaciones de β_2, β_3 que las calculadas en [3] y en [3′].

Por otro lado, con respecto a [11], la pendiente estimada y los residuos en la RLS de Y sobre X_2 son

$$\frac{\tilde{\mathbf{x}}_2'\tilde{\mathbf{y}}}{\tilde{\mathbf{x}}_2'\tilde{\mathbf{x}}_2} = \frac{33.0}{10.0} = \frac{\widehat{\text{cov}}[\mathbf{x}_2, \mathbf{y}]}{\widehat{\text{var}}[\mathbf{x}_2]} = \frac{6.6}{2.0} = 3.3,$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{\bar{3}} = \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}_2 \times \frac{\tilde{\mathbf{x}}_2'\tilde{\mathbf{y}}}{\tilde{\mathbf{x}}_2'\tilde{\mathbf{x}}_2} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -7.4 \\ 6.6 \\ -2.4 \\ 2.6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times 3.3 = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.8 \\ 0.0 \\ 0.9 \\ -0.7 \end{bmatrix},$$

mientras que la pendiente estimada y los residuos en la RLS de Y sobre X_3 son

$$\frac{\tilde{\mathbf{x}}_3'\tilde{\mathbf{y}}}{\tilde{\mathbf{x}}_3'\tilde{\mathbf{x}}_3} = \frac{19.0}{4.0} = \frac{\hat{\text{cov}}[\mathbf{x}_3, \mathbf{y}]}{\hat{\text{var}}[\mathbf{x}_3]} = \frac{3.8}{0.8} = 4.75,$$

$$\hat{\mathbf{u}}_{\bar{2}} = \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}_3 \times \frac{\tilde{\mathbf{x}}_3'\tilde{\mathbf{y}}}{\tilde{\mathbf{x}}_3'\tilde{\mathbf{x}}_3} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -7.4 \\ 6.6 \\ -2.4 \\ 2.6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \times 4.75 = \begin{bmatrix} 0.60 \\ -2.65 \\ 1.85 \\ 2.35 \\ -2.15 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, en [11],

$$\hat{\beta}_2 = \frac{\tilde{\mathbf{x}}_2'\tilde{\mathbf{y}}}{\tilde{\mathbf{x}}_2'\tilde{\mathbf{x}}_2} - \frac{\tilde{\mathbf{x}}_2'\tilde{\mathbf{x}}_3}{\tilde{\mathbf{x}}_2'\tilde{\mathbf{x}}_2} \times \hat{\beta}_3 = 3.3 - 0.6 \times (-2.0) = 4.5,$$

$$\hat{\beta}_3 = \frac{\tilde{\mathbf{x}}_3'\tilde{\mathbf{y}}}{\tilde{\mathbf{x}}_3'\tilde{\mathbf{x}}_3} - \frac{\tilde{\mathbf{x}}_3'\tilde{\mathbf{x}}_2}{\tilde{\mathbf{x}}_3'\tilde{\mathbf{x}}_3} \times \hat{\beta}_2 = 4.75 - 1.5 \times 4.5 = -2.0.$$

Observación: $\hat{\beta}_2 = 4.5$ en la RLM [M1] **no** coincide con la estimación de la pendiente en la RLS de Y sobre X_2 (3.3). $\hat{\beta}_3 = -2.0$ **tampoco** coincide (ni siquiera en el signo) con la estimación de la pendiente en la RLS de Y sobre X_3 (4.75). Estas discrepancias se deben (ver [11]) a que $\tilde{\mathbf{x}}_2'\tilde{\mathbf{x}}_3 = \tilde{\mathbf{x}}_3'\tilde{\mathbf{x}}_2 = 6 \neq 0$, o, equivalentemente, a que $\hat{\text{cov}}[\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3] = \hat{\text{cov}}[\mathbf{x}_3, \mathbf{x}_2] = 1.2 \neq 0$.

Adicionalmente, en [11],

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{u}}_{\bar{2}} - \hat{\mathbf{r}}_2\hat{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 0.60 \\ -2.65 \\ 1.85 \\ 2.35 \\ -2.15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0 \\ -0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix} \times 4.5$$

$$= \hat{\mathbf{u}}_{\bar{3}} - \hat{\mathbf{r}}_3\hat{\beta}_3 = \begin{bmatrix} 0.60 \\ -0.80 \\ 0.00 \\ 0.90 \\ -0.70 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.2 \\ -0.2 \\ -0.4 \\ 0.4 \end{bmatrix} \times (-2.0) = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -0.4 \\ -0.4 \\ 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

que son los mismos residuos que los calculados en [4] y en [4′].

Pregunta 1 [B]:

$\bar{y} = 9.4$, $\bar{\mathbf{x}} = [\bar{x}_2, \bar{x}_4]' = [3.0, 2.0]'$.

$$\underset{2\times1}{\boldsymbol{\beta}_{\text{b}}} = \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_4 \end{bmatrix}, \quad \underset{5\times1}{\tilde{\mathbf{y}}} = \begin{bmatrix} 0.6 \\ -7.4 \\ 6.6 \\ -2.4 \\ 2.6 \end{bmatrix}, \quad \underset{5\times2}{\tilde{\mathbf{X}}_{\text{b}}} = [\tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{x}}_4] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$\underset{2\times 2}{\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}'\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N}(x_{i2}-\overline{x}_2)^2 & \sum_{i=1}^{N}(x_{i2}-\overline{x}_2)(x_{i4}-\overline{x}_4) \\ \sum_{i=1}^{N}(x_{i4}-\overline{x}_4)(x_{i2}-\overline{x}_2) & \sum_{i=1}^{N}(x_{i4}-\overline{x}_4)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{2\times 2}{(\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}'\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}})^{-1}} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}. \quad \underset{2\times 1}{\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}'\tilde{\mathbf{y}}} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{N}(x_{i2}-\overline{x}_2)(y_i-\overline{y}) \\ \sum_{i=1}^{N}(x_{i4}-\overline{x}_4)(y_i-\overline{y}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$$\underset{2\times 1}{\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{b}}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_4 \end{bmatrix} = \underbrace{(\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}'\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}})^{-1}}_{2\times 2}\ \underbrace{\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}'\tilde{\mathbf{y}}}_{2\times 1} = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 33 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.30 \\ -0.25 \end{bmatrix}.$$

Observación I: $\hat{\beta}_2 = 3.3$ en la RLM [M2] coincide con la estimación de la pendiente en la RLS de Y sobre X_2 $(\tilde{\mathbf{x}}_2'\tilde{\mathbf{y}} \,/\, \tilde{\mathbf{x}}_2'\tilde{\mathbf{x}}_2)$. $\hat{\beta}_4 = -0.25$ coincide con la estimación de la pendiente en la RLS de Y sobre X_4 $(\tilde{\mathbf{x}}_4'\tilde{\mathbf{y}} \,/\, \tilde{\mathbf{x}}_4'\tilde{\mathbf{x}}_4)$. Estas coincidencias (a diferencia de lo que ocurría en la Pregunta 1 [A]) se deben a que $\widehat{\mathrm{cov}}[\mathbf{x}_2\,,\mathbf{x}_4] = 0$.

Observación II: El vector $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{b}}$ en el modelo RLM [M2] también puede calcularse como

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_2 \\ \hat{\beta}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{\mathrm{var}}[\mathbf{x}_2] & \widehat{\mathrm{cov}}[\mathbf{x}_2\,,\mathbf{x}_4] \\ \widehat{\mathrm{cov}}[\mathbf{x}_4\,,\mathbf{x}_2] & \widehat{\mathrm{var}}[\mathbf{x}_4] \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \widehat{\mathrm{cov}}[\mathbf{x}_2\,,\mathbf{y}] \\ \widehat{\mathrm{cov}}[\mathbf{x}_4\,,\mathbf{y}] \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2.0 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6.6 \\ -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 1.25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6.6 \\ -0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.30 \\ -0.25 \end{bmatrix}.$$

Pregunta 2:

Utilizando los cálculos en [7] [SCR] y en [2] [$(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$]:

$$\hat{\sigma}^2 = \tfrac{\mathrm{SCR}}{N-K} = \tfrac{0.7}{5-3} = 0.35. \qquad [12]$$

$$\widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathbf{W}}] = \hat{\sigma}^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 9.345 & 1.575 & -2.800 \\ 1.575 & 0.350 & -0.525 \\ -2.800 & -0.525 & 0.875 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\beta}_{1\mathbf{W}}] & \widehat{\mathrm{Cov}}[\hat{\beta}_{1\mathbf{W}}\,,\hat{\beta}_{2\mathbf{W}}] & \widehat{\mathrm{Cov}}[\hat{\beta}_{1\mathbf{W}}\,,\hat{\beta}_{3\mathbf{W}}] \\ \widehat{\mathrm{Cov}}[\hat{\beta}_{2\mathbf{W}}\,,\hat{\beta}_{1\mathbf{W}}] & \widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\beta}_{2\mathbf{W}}] & \widehat{\mathrm{Cov}}[\hat{\beta}_{2\mathbf{W}}\,,\hat{\beta}_{3\mathbf{W}}] \\ \widehat{\mathrm{Cov}}[\hat{\beta}_{3\mathbf{W}}\,,\hat{\beta}_{1\mathbf{W}}] & \widehat{\mathrm{Cov}}[\hat{\beta}_{3\mathbf{W}}\,,\hat{\beta}_{2\mathbf{W}}] & \widehat{\mathrm{Var}}[\hat{\beta}_{3\mathbf{W}}] \end{bmatrix}. \qquad [13]$$

$$\begin{array}{ccccccc} \hat{Y} & = & 5.900 & + & 4.500\,X_2 & - & 2.000\,X_3\,, \\ & & (3.057) & & (0.592) & & (0.935) \end{array}$$

$$N = 5,\ R^2 = 0.9937,\ \overline{R}^2 = 0.9874,\ \hat{\sigma}^2 = 0.35.$$

Observación I: Utilizando datos en desviaciones, la matriz de varianzas-covarianzas estimadas del estimador $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{b}\mathbf{W}} = [\hat{\beta}_{2\mathbf{W}}, \hat{\beta}_{3\mathbf{W}}]'$ puede calcularse a partir de [12] y [2′]:

$$\hat{\mathrm{Var}}[\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{b}\mathbf{W}}] = \hat{\sigma}^2 (\tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}}' \tilde{\mathbf{X}}_{\mathrm{b}})^{-1} = \begin{bmatrix} 0.350 & -0.525 \\ -0.525 & 0.875 \end{bmatrix} = \tag{14}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\mathrm{Var}}[\hat{\beta}_{2\mathbf{W}}] & \hat{\mathrm{Cov}}[\hat{\beta}_{2\mathbf{W}}, \hat{\beta}_{3\mathbf{W}}] \\ \hat{\mathrm{Cov}}[\hat{\beta}_{3\mathbf{W}}, \hat{\beta}_{2\mathbf{W}}] & \hat{\mathrm{Var}}[\hat{\beta}_{3\mathbf{W}}] \end{bmatrix}.$$

Observación II: Las varianzas estimadas de los estimadores $\hat{\beta}_{2\mathbf{W}}$ y $\hat{\beta}_{3\mathbf{W}}$ se pueden calcular individualmente como

$$\hat{\mathrm{Var}}[\hat{\beta}_{2\mathbf{W}}] = \frac{\hat{\sigma}^2}{\mathrm{SCR}_2} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\mathrm{SCT}_2 \times (1-R_2^2)},$$

$$\hat{\mathrm{Var}}[\hat{\beta}_{3\mathbf{W}}] = \frac{\hat{\sigma}^2}{\mathrm{SCR}_3} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\mathrm{SCT}_3 \times (1-R_3^2)},$$

donde SCR_2, SCT_2 y R_2^2 (SCR_3, SCT_3, R_3^2) son los residuos, la SCT y el R^2 en la RLS de X_2 sobre X_3 (X_3 sobre X_2).

De la solución a la Pregunta 1 [A] - Cálculos Individuales Referidos a β_2 y β_3,

$$\mathrm{SCR}_2 = \hat{\mathbf{r}}_2' \hat{\mathbf{r}}_2 = 1.0,\ \mathrm{SCT}_2 = \tilde{\mathbf{x}}_2' \tilde{\mathbf{x}}_2 = 10.0,\ R_2^2 = 1 - \frac{\mathrm{SCR}_2}{\mathrm{SCT}_2} = 0.9,$$

$$\mathrm{SCR}_3 = \hat{\mathbf{r}}_3' \hat{\mathbf{r}}_3 = 0.4,\ \mathrm{SCT}_3 = \tilde{\mathbf{x}}_3' \tilde{\mathbf{x}}_3 = 4.0,\ R_3^2 = 1 - \frac{\mathrm{SCR}_3}{\mathrm{SCT}_3} = 0.9.$$

Por lo tanto:

$$\hat{\mathrm{Var}}[\hat{\beta}_{2\mathbf{W}}] = \frac{\hat{\sigma}^2}{\mathrm{SCR}_2} = \frac{0.35}{1.0} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\mathrm{SCT}_2 \times (1-R_2^2)} = \frac{0.35}{10.0 \times (1-0.9)} = 0.350,$$

$$\hat{\mathrm{Var}}[\hat{\beta}_{3\mathbf{W}}] = \frac{\hat{\sigma}^2}{\mathrm{SCR}_3} = \frac{0.35}{0.4} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\mathrm{SCT}_3 \times (1-R_3^2)} = \frac{0.35}{4.0 \times (1-0.9)} = 0.875,$$

que son las mismas varianzas estimadas que las calculadas en [13]-[14].

Pregunta 3:

$$\boxed{F = \frac{(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})' [\mathbf{A} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{A}']^{-1} (\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})}{M \hat{\sigma}^2}} \tag{15}$$

[A] La hipótesis nula consta de un solo enunciado ($M = 1$), que puede escribirse como

$$H_0: [0, 1, -10] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \mathbf{A} = [0, 1, -10], \mathbf{c} = 0.$$

$$\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c} = [0, 1, -10] \begin{bmatrix} 5.9 \\ 4.5 \\ -2.0 \end{bmatrix} - 0 = 24.5 \,.$$

$$[\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}']^{-1} = \left[[0, 1, -10] \begin{bmatrix} 26.7 & 4.5 & -8.0 \\ 4.5 & 1.0 & -1.5 \\ -8.0 & -1.5 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -10 \end{bmatrix} \right]^{-1} = 281^{-1} \,.$$

$$F = \frac{(24.5)[281]^{-1}(24.5)}{1 \times 0.35} = \frac{24.5^2}{0.35 \times 281} = 6.1032 \,. \qquad [16]$$

Observación: 24.5^2 es $(\hat{\beta}_2 - 10\hat{\beta}_3 - 0)^2$, y $0.35 \times 281 = 98.35$ es la varianza estimada del estimador MCO de $\beta_2 - 10\beta_3$; ver la Pregunta 6.

Los valores críticos de una $F(M, N-K) = F(1, 2)$ para niveles de significación iguales a 0.10, 0.05 y 0.01 son 8.53, 18.51 y 98.50, respectivamente. Dado [16], no se puede rechazar H_0 en favor de H_1 ni siquiera al 10%.

El nivel de significación marginal (*p-value*) es

$$\alpha^* = \Pr[F(1, 2) \geq 6.1032] = 0.1321 \;\; (= 13.21\%) \,. \qquad [17]$$

[B] La hipótesis nula consta de un solo enunciado ($M = 1$), que puede escribirse como

$$H_0: \; [2, 2, -7] \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = 50 \Rightarrow \mathbf{A} = [2, 2, -7], \mathbf{c} = 50 \,.$$

$$\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c} = [2, 2, -7] \begin{bmatrix} 5.9 \\ 4.5 \\ -2.0 \end{bmatrix} - 50 = 34.8 - 50 = -15.2 \,.$$

$$[\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}']^{-1} = \left[[2, 2, -7] \begin{bmatrix} 26.7 & 4.5 & -8.0 \\ 4.5 & 1.0 & -1.5 \\ -8.0 & -1.5 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} \right]^{-1} = 535.3^{-1} \,.$$

$$F = \frac{(-15.2)[535.3]^{-1}(-15.2)}{1 \times 0.35} = \frac{(-15.2)^2}{0.35 \times 535.3} = 1.2332 \,. \qquad [18]$$

Observación: $(-15.2)^2$ es $(2\hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2 - 7\hat{\beta}_3 - 50)^2$, y $0.35 \times 535.3 = 187.355$ es la varianza estimada del estimador MCO de $2\beta_1 + 2\beta_2 - 7\beta_3$; ver la Pregunta 6.

Los valores críticos de una $F(M, N-K) = F(1,2)$ para niveles de significación iguales a 0.10, 0.05 y 0.01 son 8.53, 18.51 y 98.50, respectivamente. Dado [18], no se puede rechazar H_0 en favor de H_1 ni siquiera al 10%.

El nivel de significación marginal (*p-value*) es

$$\alpha^* = \Pr[F(1,2) \geq 1.2332] = 0.3824 \ (= 38.24\%). \tag{19}$$

[C] La hipótesis nula consta de dos enunciados ($M = 2$), que pueden escribirse como

$$H_0: \begin{bmatrix} 0 & 1 & -10 \\ 2 & 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -10 \\ 2 & 2 & -7 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -10 \\ 2 & 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.9 \\ 4.5 \\ -2.0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.5 \\ -15.2 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}']^{-1} &= \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & -10 \\ 2 & 2 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26.7 & 4.5 & -8.0 \\ 4.5 & 1.0 & -1.5 \\ -8.0 & -1.5 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \right]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 281.0 & 386.5 \\ 386.5 & 535.3 \end{bmatrix}^{-1} = \tfrac{1}{1037.05} \begin{bmatrix} 535.3 & -386.5 \\ -386.5 & 281.0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

$$F = \frac{[24.5, -15.2] \left[\tfrac{1}{1037.05} \begin{bmatrix} 535.3 & -386.5 \\ -386.5 & 281.0 \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} 24.5 \\ -15.2 \end{bmatrix}}{2 \times 0.35} = \frac{650.018}{0.7} = 928.5973. \tag{20}$$

Los valores críticos de una $F(M, N-K) = F(2,2)$ para niveles de significación iguales a 0.10, 0.05 y 0.01 son 9.00, 19.00 y 99.00, respectivamente. Dado [20], se debe rechazar H_0 en favor de H_1 incluso al 1%.

El nivel de significación marginal (*p-value*) es

$$\alpha^* = \Pr[F(2,2) \geq 928.5973] = 0.0011 \ (= 0.11\%). \tag{21}$$

Pregunta 4:

$$\boxed{F = \frac{N-K}{M} \times \frac{\text{SCR}^* - \text{SCR}}{\text{SCR}}} \tag{22}$$

En [22], SCR es la suma de cuadrados de los residuos del modelo [M1] no restringido

(SCR $= 0.7$; ver [7]), y SCR^* es la suma de cuadrados de los residuos del modelo [M1] restringido bajo $H_0: \ \beta_2 = 10\beta_3$:

$$Y = \beta_1 + 10\beta_3 X_2 + \beta_3 X_3 + U, \ \text{ o bien} \\ Y = \beta_1 + \beta_3 (10X_2 + X_3) + U. \tag{23}$$

Para estimar [23] por MCO, el vector $\mathbf{y}$ (que es el mismo que para el modelo [M1]), la matriz $\mathbf{X}$, y el vector de parámetros $\boldsymbol{\beta}$ son:

$$\underset{5\times1}{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \\ 16 \\ 7 \\ 12 \end{bmatrix}, \quad \underset{5\times2}{\mathbf{X}} = [\mathbf{i}, 10\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 35 \\ 1 & 14 \\ 1 & 56 \\ 1 & 24 \\ 1 & 46 \end{bmatrix}, \quad \underset{2\times1}{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_3 \end{bmatrix}. \tag{24}$$

$$\underset{2\times2}{\mathbf{X}'\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} 5 & 175 \\ 175 & 7249 \end{bmatrix} \Rightarrow \underset{2\times2}{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}} = \tfrac{1}{5620}\begin{bmatrix} 7249 & -175 \\ -175 & 5 \end{bmatrix}. \quad \underset{2\times1}{\mathbf{X}'\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 47 \\ 1994 \end{bmatrix}. \tag{25}$$

$$\underset{2\times1}{\hat{\boldsymbol{\beta}}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}}_{2\times2} \underbrace{\mathbf{X}'\mathbf{y}}_{2\times1} = \tfrac{1}{5620}\begin{bmatrix} 7249 & -175 \\ -175 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 47 \\ 1994 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{8247}{5620} \\ \frac{1745}{5620} \end{bmatrix}. \tag{26}$$

$$\text{SCR}^* = \mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} = 553 - \left[-\tfrac{8247}{5620}, \tfrac{1745}{5620}\right]\begin{bmatrix} 47 \\ 1994 \end{bmatrix} = 2.83612. \tag{27}$$

$$F = \frac{5-3}{1} \times \frac{2.83612 - 0.7}{0.7} = 6.1032, \tag{28}$$

que coincide con [16].

Observación: Dado que tanto el modelo original [M1] como el modelo restringido [23] tienen término constante, y además la variable dependiente es la misma en ambos modelos ($\Rightarrow \text{SCT}^* = \text{SCT}$), el estadístico F también se puede calcular en este caso como

$$F = \tfrac{N-K}{M} \times \tfrac{R^2 - R_*^2}{1-R^2},$$

donde R^2 es el coeficiente de determinación (centrado) en el modelo original [M1], y R_*^2 es el coeficiente de determinación (centrado) en el modelo restringido [23]:

$$R^2 = 1 - \tfrac{\text{SCR}}{\text{SCT}} = 1 - \tfrac{0.7}{111.2} \ \text{ y } \ R_*^2 = 1 - \tfrac{\text{SCR}^*}{\text{SCT}^*} = 1 - \tfrac{2.83612}{111.2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F = \tfrac{5-3}{1} \times \frac{\left(1 - \frac{0.7}{111.2}\right) - \left(1 - \frac{2.83612}{111.2}\right)}{1 - \left(1 - \frac{0.7}{111.2}\right)} = 6.1032.$$

Pregunta 5:

$$H_0: \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \;\; H_1: \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Cálculo del estadístico F como en la Pregunta 3 (ver [15]):

$$F = \frac{(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})'[\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}']^{-1}(\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c})}{M\hat{\sigma}^2}.$$

La hipótesis nula consta de dos enunciados ($M = 2$), que pueden escribirse como

$$H_0: \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{A}\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5.9 \\ 4.5 \\ -2.0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5 \\ -2.0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned}[\mathbf{A}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{A}']^{-1} &= \left[\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26.7 & 4.5 & -8.0 \\ 4.5 & 1.0 & -1.5 \\ -8.0 & -1.5 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right]^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1.0 & -1.5 \\ -1.5 & 2.5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

$$F = \frac{[4.5, -2.0] \begin{bmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4.5 \\ -2.0 \end{bmatrix}}{2 \times 0.35} = \frac{110.5}{0.7} = 157.8571. \quad [29]$$

Cálculo del estadístico F a partir del R^2 del modelo [M1] (ver [8]):

$$F = \frac{N-K}{K-1} \times \frac{R^2}{1-R^2} = \frac{5-3}{3-1} \times \frac{\frac{110.5}{111.2}}{1 - \frac{110.5}{111.2}} = 157.8571. \quad [30]$$

Los valores críticos de una $F(M, N-K) = F(2,2)$ para niveles de significación iguales a 0.10, 0.05 y 0.01 son 9.00, 19.00 y 99.00, respectivamente. Dado [29] ó [30], se debe rechazar H_0 en favor de H_1 incluso al 1%.

El nivel de significación marginal (*p-value*) es

$$\alpha^* = \Pr[F(2,2) \geq 157.8571] = 0.0063 \;\; (= 0.63\%). \quad [31]$$

Pregunta 6:

$$\boxed{t = \frac{\text{Lado izquierdo estimado de H}_0 \quad - \quad \text{Lado derecho de H}_0}{\text{Error estándar del estimador del lado izquierdo de H}_0}} \qquad [32]$$

Para el contraste [A] de la Pregunta 3:

$$t = \frac{\hat{\beta}_2 - 10\hat{\beta}_3 - 0}{\text{D}\hat{\text{v}}\text{t}[\,\hat{\beta}_{2\mathbf{W}} - 10\,\hat{\beta}_{3\mathbf{W}}\,]}\,,$$

donde $\hat{\beta}_2 - 10\hat{\beta}_3 - 0 = 4.5 - 10 \times (-2) = 24.5$, y (ver [13] ó [14]):

$$\begin{aligned}\text{V}\hat{\text{a}}\text{r}[\,\hat{\beta}_{2\mathbf{W}} - 10\,\hat{\beta}_{3\mathbf{W}}\,] &= \text{V}\hat{\text{a}}\text{r}[\,\hat{\beta}_{2\mathbf{W}}\,] + (-10)^2 \times \text{V}\hat{\text{a}}\text{r}[\,\hat{\beta}_{3\mathbf{W}}\,] \\ &+ 2 \times [1 \times (-10)] \times \text{C}\hat{\text{o}}\text{v}[\,\hat{\beta}_{2\mathbf{W}},\, \hat{\beta}_{3\mathbf{W}}\,] \\ &= 0.350 + 100 \times 0.875 - 20 \times (-0.525) = 98.35.\end{aligned}$$

$$t = \frac{24.5}{\sqrt{98.35}} = 2.4705\,. \qquad [33]$$

Los valores críticos de una $t(N-K) = t(2)$ para niveles de significación iguales a 0.10, 0.05 y 0.01 son 2.920, 4.303 y 9.925, respectivamente. Como $|\,t\,| = 2.4705$, no se puede rechazar H_0 en favor de H_1 ni siquiera al 10%.

El nivel de significación marginal (*p-value*) es

$$\alpha^* = 2 \times \Pr[t(2) \geq 2.4705] = 0.1321 \ (= 13.21\%)\,. \qquad [34]$$

Observación: El estadístico F en [16] es igual al cuadrado del estadístico t en [33]. Los valores críticos de una $F(1,2)$ son iguales a los cuadrados de los valores críticos de una $t(2)$. Los niveles de significación marginales en [17] y [34] son **iguales**.

Para el contraste [B] de la Pregunta 3:

$$t = \frac{2\hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2 - 7\hat{\beta}_3 - 50}{\text{D}\hat{\text{v}}\text{t}[2\hat{\beta}_{1\mathbf{W}} + 2\hat{\beta}_{2\mathbf{W}} - 7\hat{\beta}_{3\mathbf{W}}\,]}\,,$$

donde $2\hat{\beta}_1 + 2\hat{\beta}_2 - 7\hat{\beta}_3 - 50 = 2 \times 5.9 + 2 \times 4.5 - 7 \times (-2) - 50 = -15.2$, y:

$$\begin{aligned}\text{V}\hat{\text{a}}\text{r}[2\hat{\beta}_{1\mathbf{W}} + 2\hat{\beta}_{2\mathbf{W}} - 7\hat{\beta}_{3\mathbf{W}}\,] &= 2^2 \times \text{V}\hat{\text{a}}\text{r}[\,\hat{\beta}_{1\mathbf{W}}\,] + 2^2 \times \text{V}\hat{\text{a}}\text{r}[\,\hat{\beta}_{2\mathbf{W}}\,] + (-7)^2 \times \text{V}\hat{\text{a}}\text{r}[\,\hat{\beta}_{3\mathbf{W}}\,] \\ &+ 2 \times [2 \times 2] \times \text{C}\hat{\text{o}}\text{v}[\,\hat{\beta}_{1\mathbf{W}},\, \hat{\beta}_{2\mathbf{W}}\,] \\ &+ 2 \times [2 \times (-7)] \times \text{C}\hat{\text{o}}\text{v}[\,\hat{\beta}_{1\mathbf{W}},\, \hat{\beta}_{3\mathbf{W}}\,] \\ &+ 2 \times [2 \times (-7)] \times \text{C}\hat{\text{o}}\text{v}[\,\hat{\beta}_{2\mathbf{W}},\, \hat{\beta}_{3\mathbf{W}}\,] \\ &= 4 \times 9.345 + 4 \times 0.35 + 49 \times 0.875 \\ &+ 8 \times 1.575 - 28 \times (-2.8) - 28 \times (-0.525) = 187.355.\end{aligned}$$

$$t = \frac{-15.2}{\sqrt{187.355}} = -1.1105\,. \qquad [35]$$

Los valores críticos de una $t(N-K) = t(2)$ para niveles de significación iguales a 0.10, 0.05 y 0.01 son 2.920, 4.303 y 9.925, respectivamente. Como $|\,t\,| = 1.1105$, no se puede rechazar H_0 en favor de H_1 ni siquiera al 10%.

El nivel de significación marginal (*p-value*) es

$$\alpha^* = 2 \times \Pr[t(2) \geq 1.1105] = 0.3824 \;\; (= 38.24\%)\,. \qquad [36]$$

Observación: El estadístico F en [18] es igual al cuadrado del estadístico t en [35]. Los valores críticos de una $F(1,2)$ son iguales a los cuadrados de los valores críticos de una $t(2)$. Los niveles de significación marginales en [19] y [36] son **iguales**.

Pregunta 7:

[A] El estadístico t es el mismo que para el primer contraste de la Pregunta 6:

$$t = \frac{\hat\beta_2 - 10\hat\beta_3 - 0}{\mathrm{D\hat{v}t}[\,\hat\beta_{2\mathbf{W}} - 10\,\hat\beta_{3\mathbf{W}}]} = \frac{24.5-0}{\sqrt{98.35}} = 2.4705\,.$$

El *p-value* para una alternativa de tipo $>$ es

$$\alpha^*(>) = \Pr[t(2) \geq 2.4705] = 0.0661 \;\; \left[= \tfrac{1}{2}\,\alpha^* \;\text{ en } [34]\right].$$

El *p-value* para una alternativa de tipo $<$ es

$$\alpha^*(<) = \Pr[t(2) \leq 2.4705] = 0.9339 \;\; [= 1 - \alpha^*(>)\,].$$

[B] El estadístico t es el mismo que para el segundo contraste de la Pregunta 6:

$$t = \frac{2\hat\beta_1 + 2\hat\beta_2 - 7\hat\beta_3 - 50}{\mathrm{D\hat{v}t}[2\hat\beta_{1\mathbf{W}} + 2\hat\beta_{2\mathbf{W}} - 7\hat\beta_{3\mathbf{W}}\,]} = \frac{34.8-50}{\sqrt{187.355}} = -1.1105\,.$$

El *p-value* para una alternativa de tipo $<$ es

$$\alpha^*(<) = \Pr[t(2) \leq -1.1105] = 0.1912 \;\; \left[= \tfrac{1}{2}\,\alpha^* \;\text{ en } [36]\right].$$

El *p-value* para una alternativa de tipo $>$ es

$$\alpha^*(>) = \Pr[t(2) \geq -1.1105] = 0.8088 \;\; [= 1 - \alpha^*(<)\,].$$

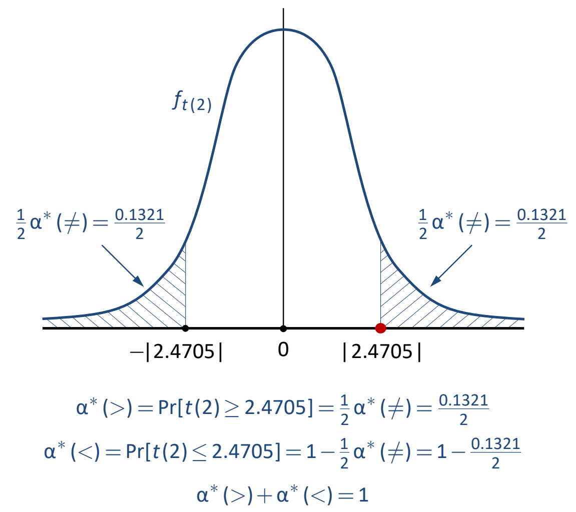
Observación: Los valores críticos de una $t(N-K) = t(2)$ para niveles de significación iguales a 0.10, 0.05 y 0.01 son 1.886, 2.920 y 6.965, respectivamente, para la alternativa $>$, y los mismos con el signo contrario para la alternativa $<$.

Pregunta 8:

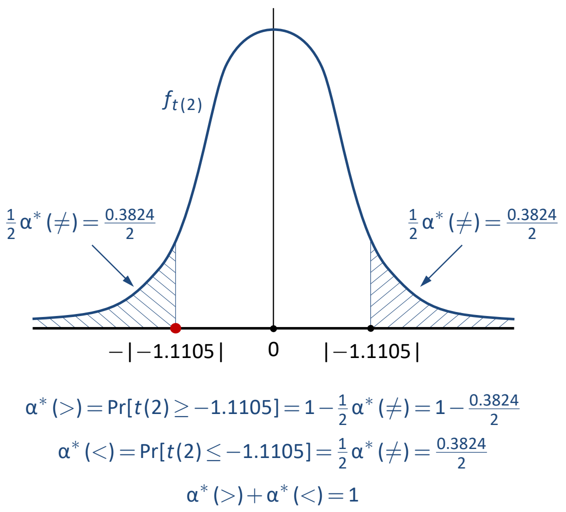
Para β_1 (término constante), $H_0:\; \beta_1 = 0;\;\; H_1:\; \beta_1 \neq 0:$

$$t(\beta_1) = \frac{\hat\beta_1}{\mathrm{D\hat{v}t}[\,\hat\beta_{1\mathbf{W}}]} = \frac{5.9}{\sqrt{9.345}} = 1.9300\,. \qquad [37]$$

Pregunta 7 [A]



Pregunta 7 [B]



Para β_2 (pendiente asociada con X_2), $H_0: \beta_2 = 0$; $H_1: \beta_2 \neq 0$:

$$t(\beta_2) = \frac{\hat{\beta}_2}{\hat{\text{Dvt}}[\hat{\beta}_{2\mathbf{W}}]} = \frac{4.5}{\sqrt{0.35}} = 7.6064\,. \qquad [38]$$

Para β_3 (pendiente asociada con X_3), $H_0: \beta_3 = 0$; $H_1: \beta_3 \neq 0$:

$$t(\beta_3) = \frac{\hat{\beta}_3}{\hat{\text{Dvt}}[\hat{\beta}_{3\mathbf{W}}]} = \frac{-2.0}{\sqrt{0.875}} = -2.1381\,. \qquad [39]$$

Los valores críticos de una $t(N-K) = t(2)$ para niveles de significación iguales a 0.10, 0.05 y 0.01 son 2.920, 4.303 y 9.925, respectivamente.

Como $|t(\beta_1)| = 1.9300$, no se rechaza H_0 ($\Rightarrow \beta_1$ no es significativo) ni siquiera al 10%. El nivel de significación marginal es

$$\alpha^*_{\beta_1} = 2 \times \Pr[t(2) \geq 1.9300] = 0.1934\,.$$

Como $|t(\beta_2)| = 7.6064$, se rechaza H_0 ($\Rightarrow \beta_2$ sí es significativo) al 10% y al 5%, aunque no ($\Rightarrow \beta_2$ no es significativo) al 1%. El nivel de significación marginal es

$$\alpha^*_{\beta_2} = 2 \times \Pr[t(2) \geq 7.6064] = 0.0168\,.$$

Como $|t(\beta_3)| = 2.1381$, no se rechaza H_0 ($\Rightarrow \beta_3$ no es significativo) ni siquiera al 10%. El nivel de significación marginal es

$$\alpha^*_{\beta_3} = 2 \times \Pr[t(2) \geq 2.1381] = 0.1659\,.$$

Pregunta 9:

$$\begin{aligned} \text{IC}_{0.95}(\beta_2 - 10\beta_3) &= \left[(\hat{\beta}_2 - 10\hat{\beta}_3) \mp t_{0.975} \times \hat{\text{Dvt}}(\hat{\beta}_{2\mathbf{W}} - 10\,\hat{\beta}_{3\mathbf{W}})\right] \\ &= \left[24.5 \mp 4.303 \times \sqrt{98.35}\right] = [-18.17, 67.17]. \end{aligned} \qquad \text{[Pregunta 6]}$$

$$\mathrm{IC}_{0.95}(\beta_2) = \left[\, \hat{\beta}_2 \mp t_{0.975} \times \mathrm{D\hat{v}t}(\hat{\beta}_{2\mathbf{W}}) \,\right] = \left[\, 4.5 \mp 4.303 \times \sqrt{0.35} \,\right] = [1.95, 7.05]. \qquad \text{[Pregunta 8]}$$

Como $0 \notin \mathrm{IC}_{0.95}(\beta_2)$, β_2 sí es significativo al 5%

$$\mathrm{IC}_{0.95}(\beta_3) = \left[\, \hat{\beta}_3 \mp t_{0.975} \times \mathrm{D\hat{v}t}(\hat{\beta}_{3\mathbf{W}}) \,\right] = \left[\, -2.0 \mp 4.303 \times \sqrt{0.875} \,\right] = [-6.02, 2.02]. \qquad \text{[Pregunta 8]}$$

Como $0 \in \mathrm{IC}_{0.95}(\beta_3)$, β_2 no es significativo al 5%

Pregunta 10:

$$\begin{aligned} \hat{y}_f &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \times x_{f2} + \hat{\beta}_3 \times x_{f3} \\ &= \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \times 11 + \hat{\beta}_3 \times 1 = 5.9 + 4.5 \times 11 + (-2) \times 1 = 53.4. \end{aligned} \qquad [40]$$

$$\hat{\Sigma}[V_f] = \sqrt{\hat{\sigma}^2 + \mathrm{V\hat{a}r}[\hat{Y}_f]}, \text{ con}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{V\hat{a}r}[\hat{Y}_f] &= \mathrm{V\hat{a}r}[\hat{\beta}_{1\mathbf{W}} + 11 \times \hat{\beta}_{2\mathbf{W}} + 1 \times \hat{\beta}_{3\mathbf{W}}] \\ &= \mathrm{V\hat{a}r}[\hat{\beta}_{1\mathbf{W}}] + 11^2 \times \mathrm{V\hat{a}r}[\hat{\beta}_{2\mathbf{W}}] + \mathrm{V\hat{a}r}[\hat{\beta}_{3\mathbf{W}}] \\ &+ 2 \times 11 \times \mathrm{C\hat{o}v}[\hat{\beta}_{1\mathbf{W}}, \hat{\beta}_{2\mathbf{W}}] + 2 \times \mathrm{C\hat{o}v}[\hat{\beta}_{1\mathbf{W}}, \hat{\beta}_{3\mathbf{W}}] \\ &+ 2 \times 11 \times \mathrm{C\hat{o}v}[\hat{\beta}_{2\mathbf{W}}, \hat{\beta}_{3\mathbf{W}}] \\ &= 9.345 + 121 \times 0.35 + 0.875 \\ &+ 22 \times 1.575 + 2 \times (-2.8) + 22 \times (-0.525) = 70.07. \end{aligned} \qquad [41]$$

$$\Rightarrow \hat{\Sigma}[V_f] = \sqrt{0.35 + 70.07} = \sqrt{70.42}. \qquad [42]$$

$$\begin{aligned} \mathrm{I\hat{C}}_{0.95}(Y_f) &= \left[\, \hat{y}_f \mp \hat{\Sigma}[V_f] \times t_{0.975} \,\right] \\ &= \left[\, 53.4 \mp \sqrt{70.42} \times 4.303 \,\right] = [17.29, 89.51]. \end{aligned} \qquad [43]$$

$$\begin{aligned} \mathrm{\hat{P}r}[Y_f \geq 50] &= \mathrm{Pr}\left[t(N-K) \geq \frac{50 - \hat{y}_f}{\hat{\Sigma}[V_f]} \right] = \mathrm{Pr}\left[t(5-3) \geq \frac{50 - 53.4}{\sqrt{70.42}} \right] \\ &= \mathrm{Pr}[t(2) \geq -0.405] = \mathrm{Pr}[t(2) \leq 0.405] = 0.6377. \end{aligned} \qquad [44]$$

$$\begin{aligned} \mathrm{\hat{P}r}[Y_f \leq 100] &= \mathrm{Pr}\left[t(N-K) \leq \frac{100 - \hat{y}_f}{\hat{\Sigma}[V_f]} \right] = \mathrm{Pr}\left[t(5-3) \leq \frac{100 - 53.4}{\sqrt{70.42}} \right] \\ &= \mathrm{Pr}[t(2) \leq 5.553] = 0.9845. \end{aligned} \qquad [45]$$