

# ECONOMETRÍA

## EJERCICIO 2 - RESUELTO

EN ESTE EJERCICIO SE ILUSTRAN LAS FÓRMULAS Y LOS CÁLCULOS ASOCIADOS CON LA ESTIMACIÓN POR MÍNIMOS CUADRADOS ORDINARIOS DE UN MODELO DE REGRESIÓN LINEAL SIMPLE. ES MUY IMPORTANTE ESTUDIARLO CON ATENCIÓN Y COMPROBAR Y REPRODUCIR A MANO TODOS LOS CÁLCULOS NUMÉRICOS.

### ENUNCIADO - PARTE I

A partir de la fórmula general  $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y}$ , obtener fórmulas específicas para las estimaciones MCO de los parámetros en los dos modelos siguientes:

$$Y = \beta_1 + U. \quad [\text{M1}]$$

$$Y = \beta_1 + \beta_2 X_2 + U. \quad [\text{M2}]$$

### SOLUCIÓN

En el modelo [M1] ( $K = 1$ ):

$$\boldsymbol{\beta} = \beta_1; \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}; \mathbf{X} = \mathbf{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}; \mathbf{X}'\mathbf{X} = N; (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \frac{1}{N}; \mathbf{X}'\mathbf{y} = \sum y_i. \quad [\text{M1.1}]$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \hat{\beta}_1 = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} = \frac{1}{N} \sum y_i = \bar{y} \text{ (media muestral de } \mathbf{y}\text{)}. \quad [\text{M1.2}]$$

En el modelo [M2] (RLS,  $K = 2$ ):

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}; \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}; \mathbf{X} = [\mathbf{i}, \mathbf{x}_2] = \begin{bmatrix} 1 & x_{12} \\ 1 & x_{22} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_{N2} \end{bmatrix}; \quad [\text{M2.1}]$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} N & \sum x_{i2} \\ \sum x_{i2} & \sum x_{i2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N & N\bar{x}_2 \\ N\bar{x}_2 & \sum x_{i2}^2 \end{bmatrix}; \mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{i2}y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N\bar{y} \\ \sum x_{i2}y_i \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} &= \frac{1}{N(\sum x_{i2}^2 - N\bar{x}_2^2)} \begin{bmatrix} \sum x_{i2}^2 & -N\bar{x}_2 \\ -N\bar{x}_2 & N \end{bmatrix} = \frac{1}{\sum(x_{i2} - \bar{x}_2)^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{N} \sum x_{i2}^2 & -\bar{x}_2 \\ -\bar{x}_2 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{N} + \frac{\bar{x}_2^2}{\sum(x_{i2} - \bar{x}_2)^2} & -\frac{\bar{x}_2}{\sum(x_{i2} - \bar{x}_2)^2} \\ -\frac{\bar{x}_2}{\sum(x_{i2} - \bar{x}_2)^2} & \frac{1}{\sum(x_{i2} - \bar{x}_2)^2} \end{bmatrix}. \quad [\text{M2.2}] \end{aligned}$$

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \frac{1}{N} + \frac{\bar{x}_2^2}{\sum(x_{i2} - \bar{x}_2)^2} & -\frac{\bar{x}_2}{\sum(x_{i2} - \bar{x}_2)^2} \\ -\frac{\bar{x}_2}{\sum(x_{i2} - \bar{x}_2)^2} & \frac{1}{\sum(x_{i2} - \bar{x}_2)^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N\bar{y} \\ \sum x_{i2}y_i \end{bmatrix} = \quad [M2.3]$$

$$= \begin{bmatrix} \bar{y} + \frac{N\bar{x}_2^2\bar{y} - \bar{x}_2 \sum x_{i2}y_i}{\sum(x_{i2} - \bar{x}_2)^2} \\ \frac{-N\bar{x}_2\bar{y} + \sum x_{i2}y_i}{\sum(x_{i2} - \bar{x}_2)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} - \bar{x}_2 \frac{\sum x_{i2}y_i - N\bar{x}_2\bar{y}}{\sum(x_{i2} - \bar{x}_2)^2} \\ \frac{\sum x_{i2}y_i - N\bar{x}_2\bar{y}}{\sum(x_{i2} - \bar{x}_2)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y} - \bar{x}_2 \hat{\beta}_2 \\ \frac{\sum(x_{i2} - \bar{x}_2)(y_i - \bar{y})}{\sum(x_{i2} - \bar{x}_2)^2} \end{bmatrix}.$$

## ENUNCIADO - PARTE II

Estimar el modelo de regresión lineal simple [M2] con los datos de la tabla siguiente:

y	x <sub>2</sub>
84	32
108	40
92	36
110	44
106	48

En las Secciones 1 - 10 de la guía *Introducción al Uso de EViews 4.1* se dan las indicaciones necesarias para obtener con EViews los resultados de algunas de las operaciones que se muestran a continuación.

## SOLUCIÓN

En el modelo [M2] (RLS,  $K = 2$ ) con los datos de la tabla anterior ( $N = 5$ ):

$$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 84 \\ 108 \\ 92 \\ 110 \\ 106 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{X} = [\mathbf{i}, \mathbf{x}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 32 \\ 1 & 40 \\ 1 & 36 \\ 1 & 44 \\ 1 & 48 \end{bmatrix}. \quad [1]$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{bmatrix} N & \sum_{i=1}^N x_{i2} \\ \sum_{i=1}^N x_{i2} & \sum_{i=1}^N x_{i2}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 200 \\ 200 & 8160 \end{bmatrix} \Rightarrow (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 10.2 & -0.25 \\ -0.25 & 0.00625 \end{bmatrix}. \quad [2]$$

$$\mathbf{X}'\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^N y_i \\ \sum_{i=1}^N x_{i2}y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 20248 \end{bmatrix}. \quad [3]$$

### Estimación MCO de $\beta$ :

$$[2] \text{ y } [3] \Rightarrow \hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_1 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = \begin{matrix} (2 \times 1) \\ (2 \times 2)^{-1} \end{matrix} \begin{matrix} \mathbf{X}'\mathbf{X} \\ \mathbf{X}'\mathbf{y} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 10.2 & -0.25 \\ -0.25 & 0.00625 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 500 \\ 20248 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} \begin{bmatrix} 38 \\ 1.55 \end{bmatrix} \end{matrix}. \quad [4]$$

**Observación:** Las estimaciones  $\hat{\beta}_1$  y  $\hat{\beta}_2$  también pueden calcularse en este caso utilizando las fórmulas específicas en [M2.3] para un modelo RLS:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_2 &= \frac{\sum_{i=1}^N (x_{i2} - \bar{x}_2)(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^N (x_{i2} - \bar{x}_2)^2} = \frac{248}{160} = 1.55 \\ &= \frac{\text{côv}[\mathbf{x}_2, \mathbf{y}]}{\text{vâr}[\mathbf{x}_2]} = \frac{49.6}{32} = 1.55 \\ &= \frac{\text{d\hat{v}t}[\mathbf{y}]}{\text{d\hat{v}t}[\mathbf{x}_2]} \times \text{côrr}[\mathbf{x}_2, \mathbf{y}] = \frac{\sqrt{104}}{\sqrt{32}} \times \frac{49.6}{\sqrt{32} \times \sqrt{104}} = 1.55, \\ \hat{\beta}_1 &= \bar{y} - \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 = 100 - 1.55 \times 40 = 38, \end{aligned}$$

donde  $\bar{y} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 y_i = \frac{1}{5} \times 500 = 100$ ,  $\bar{x}_2 = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 x_{i2} = \frac{1}{5} \times 200 = 40$ . A

### Valores Ajustados y Residuos:

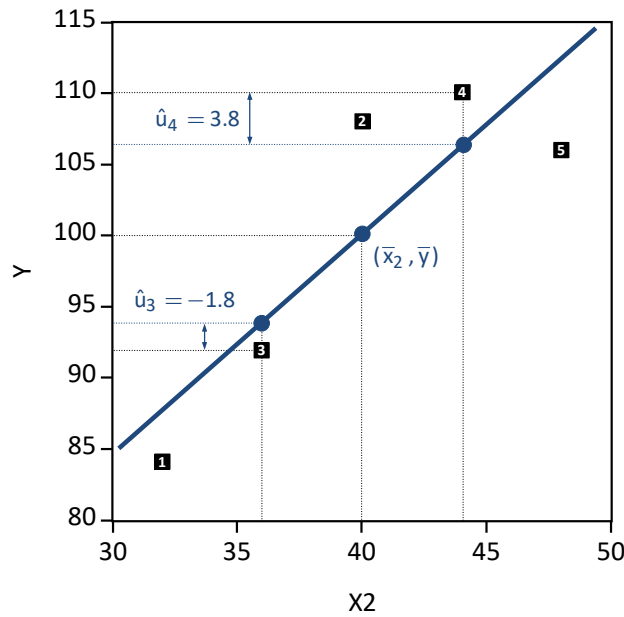
$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{X}\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 1 & 32 \\ 1 & 40 \\ 1 & 36 \\ 1 & 44 \\ 1 & 48 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38 \\ 1.55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 87.6 \\ 100 \\ 93.8 \\ 106.2 \\ 112.4 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} 84 \\ 108 \\ 92 \\ 110 \\ 106 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 87.6 \\ 100 \\ 93.8 \\ 106.2 \\ 112.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3.6 \\ 8 \\ -1.8 \\ 3.8 \\ -6.4 \end{bmatrix}. \quad [5]$$

Cada valor ajustado  $\hat{y}_i$  puede calcularse como  $\hat{y}_i = 38 + 1.55x_{i2}$ . Cada residuo  $\hat{u}_i$  puede calcularse como  $\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i = y_i - (38 + 1.55x_{i2})$  ( $i = 1, \dots, 5$ ).

La ortogonalidad entre variables explicativas y residuos MCO ( $\mathbf{X}'\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ ) implica en este caso que  $\sum_{i=1}^5 \hat{u}_i = 0$  y  $\mathbf{x}'_2\hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^5 x_{i2}\hat{u}_i = 0$ ; la ortogonalidad entre valores ajustados y residuos MCO implica en este caso que  $\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^5 \hat{y}_i\hat{u}_i = 0$ .

Como un modelo RLS tiene **término constante**,  $\sum_{i=1}^5 y_i = \sum_{i=1}^5 \hat{y}_i = 500$ , por lo que  $\bar{y} = \bar{\hat{y}} = 100$ . Además,  $\bar{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 \bar{x}_2 \Rightarrow 100 = 38 + 1.55 \times 40$  [la recta de regresión estimada pasa por el punto  $(\bar{x}_2, \bar{y}) = (40, 100)$ ].

La relación  $\mathbf{y}'\mathbf{y} = \hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}$  puede comprobarse en este caso teniendo en cuenta que  $\mathbf{y}'\mathbf{y} = \sum_{i=1}^5 y_i^2 = 50520$ ,  $\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} = \sum_{i=1}^5 \hat{y}_i^2 = 50384.4$ , y  $\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^5 \hat{u}_i^2 = 135.6$ .



B

**Coefficientes de Determinación y Sumas de Cuadrados:**

$$R_{NC}^2 = \frac{\hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}}}{\mathbf{y}'\mathbf{y}} = \frac{50384.4}{50520} = 1 - \frac{\hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}}}{\mathbf{y}'\mathbf{y}} = 1 - \frac{135.6}{50520} = 0.9973. \quad [6]$$

$$R^2 = \text{corr}[\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{y}]^2 = \frac{\text{cov}[\hat{\mathbf{y}}, \mathbf{y}]^2}{\text{var}[\hat{\mathbf{y}}] \times \text{var}[\mathbf{y}]} = \frac{76.88^2}{76.88 \times 104} = 0.7392. \quad [7]$$

$$\text{SCT} = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 = \mathbf{y}'\mathbf{y} - N\bar{y}^2 = 50520 - 5 \times 100^2 = 520. \quad [8]$$

$$\text{SCE} = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} - N\bar{y}^2 = 50384.4 - 5 \times 100^2 = 384.4. \quad [9]$$

$$\begin{aligned} \text{SCR} &= \sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2 = \hat{\mathbf{u}}'\hat{\mathbf{u}} = 135.6 \\ &= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}'\hat{\mathbf{y}} = 50520 - 50384.4 = 135.6 \end{aligned} \quad [10]$$

$$= \mathbf{y}'\mathbf{y} - \hat{\boldsymbol{\beta}}'\mathbf{X}'\mathbf{y} = 50520 - [38, 1.55] \begin{bmatrix} 500 \\ 20248 \end{bmatrix} = 135.6.$$

Adicionalmente, la presencia del **término constante** en un modelo RLS implica que

$$\text{SCT} = \text{SCE} + \text{SCR} \quad [ 520 = 384.4 + 135.6 ],$$

$$R^2 = \frac{\text{var}[\hat{\mathbf{y}}]}{\text{var}[\mathbf{y}]} = \frac{76.88}{104} = \frac{\text{SCE}}{\text{SCT}} = \frac{384.4}{520} = 1 - \frac{\text{SCR}}{\text{SCT}} = 1 - \frac{135.6}{520} = 0.7392,$$

$$\bar{R}^2 = 1 - \frac{\frac{\text{SCR}}{\text{SCT}}}{\frac{N-K}{N-1}} = 1 - \frac{\frac{135.6}{5-2}}{\frac{520}{5-1}} = 1 - \frac{(N-1)(1-R^2)}{N-K} = 1 - \frac{(5-1)(1-0.7392)}{5-2} = 0.6523. \quad [C]$$

**Observación:** Los residuos, la SCE y el  $R^2$  también pueden calcularse en este caso utilizando las siguientes fórmulas específicas para un modelo RLS:

$$\hat{\mathbf{u}} = \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{x}}_2 \hat{\beta}_2 = \begin{bmatrix} y_1 - \bar{y} \\ y_2 - \bar{y} \\ \vdots \\ y_N - \bar{y} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{12} - \bar{x}_2 \\ x_{22} - \bar{x}_2 \\ \vdots \\ x_{N2} - \bar{x}_2 \end{bmatrix} \times \hat{\beta}_2 = \begin{bmatrix} -16 \\ 8 \\ -8 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ -4 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} \times 1.55 = \begin{bmatrix} -3.6 \\ 8 \\ -1.8 \\ 3.8 \\ -6.4 \end{bmatrix},$$

$$\text{SCE} = \hat{\beta}_2 \tilde{\mathbf{x}}_2' \tilde{\mathbf{y}} = \hat{\beta}_2 \times \sum_{i=1}^N (x_{i2} - \bar{x}_2)(y_i - \bar{y}) = 1.55 \times 248 = 384.4,$$

$$R^2 = \text{corr}[\mathbf{x}_2, \mathbf{y}]^2 = \frac{\text{côv}[\mathbf{x}_2, \mathbf{y}]^2}{\text{vâr}[\mathbf{x}_2] \times \text{vâr}[\mathbf{y}]} = \frac{49.6^2}{32 \times 104} = 0.7392. \quad \boxed{\text{D}}$$

**Estimación de  $\sigma^2$  y  $\text{Var}[\hat{\beta}_{\mathbf{W}}]$ :**

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\text{SCR}}{N - K} = \frac{135.6}{5 - 2} = 45.2. \quad [11]$$

$$\begin{aligned} \text{Vâr}[\hat{\beta}_{\mathbf{W}}] &= \hat{\sigma}^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{bmatrix} 10.2\hat{\sigma}^2 & -0.25\hat{\sigma}^2 \\ -0.25\hat{\sigma}^2 & 0.00625\hat{\sigma}^2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 461.04 & -11.3 \\ -11.3 & 0.2825 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Vâr}[\hat{\beta}_1 \mathbf{W}] & \text{Côv}[\hat{\beta}_1 \mathbf{W}, \hat{\beta}_2 \mathbf{W}] \\ \text{Côv}[\hat{\beta}_2 \mathbf{W}, \hat{\beta}_1 \mathbf{W}] & \text{Vâr}[\hat{\beta}_2 \mathbf{W}] \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad [12]$$

**Observación:** Las varianzas y la covarianza estimadas anteriores también pueden calcularse en este caso utilizando las fórmulas específicas para el modelo RLS que se obtienen para los elementos de  $\text{Vâr}[\hat{\beta}_{\mathbf{W}}] = \hat{\sigma}^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$  a partir de [M2.2]:

$$\text{Vâr}[\hat{\beta}_1 \mathbf{W}] = \hat{\sigma}^2 \left( \frac{1}{N} + \frac{\bar{x}_2^2}{\sum_{i=1}^N (x_{i2} - \bar{x}_2)^2} \right) = 45.2 \times \left( \frac{1}{5} + \frac{40^2}{160} \right) = 461.04,$$

$$\text{Vâr}[\hat{\beta}_2 \mathbf{W}] = \hat{\sigma}^2 \left( \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_{i2} - \bar{x}_2)^2} \right) = 45.2 \times \left( \frac{1}{160} \right) = 0.2825,$$

$$\text{Côv}[\hat{\beta}_1 \mathbf{W}, \hat{\beta}_2 \mathbf{W}] = \hat{\sigma}^2 \left( -\frac{\bar{x}_2}{\sum_{i=1}^N (x_{i2} - \bar{x}_2)^2} \right) = 45.2 \times \left( -\frac{40}{160} \right) = -11.3.$$

**Resumen del Modelo Estimado:**

**E**

$$\hat{Y} = 38.00 + 1.55 X_2, \quad (21.47) \quad (0.53)$$

$$N = 5, \quad R^2 = 0.7392, \quad \bar{R}^2 = 0.6523, \quad \hat{\sigma}^2 = 45.2.$$