ECONOMETRÍA

JOSÉ ALBERTO MAURICIO

3

REGRESIÓN LINEAL MÚLTIPLE II

3.2 DIAGNOSIS - RESIDUOS - OBSERVACIONES INFLUYENTES

Departamento de Análisis Económico y Economía Cuantitativa
Universidad Complutense de Madrid

EctrGr-JAM-3-2.pdf

ucm.randomshock.com/ectrgr

Versión 2.0 - Enero 2023

REQUISITOS

En esta Sección 3.2 se suponen bien conocidos [1] los aspectos teóricos y prácticos del Análisis de Regresión Lineal cubiertos en los Temas 1 - 2 y en la Sección 3.1 del Tema 3, y [2] todos los procedimientos descritos en las Secciones 1 - 14 de la guía *Introducción al Uso de EViews 4.1*.

BIBLIOGRAFÍA PARA LA SECCIÓN 3.2

Hill, Griffiths, Lim (2018): Apartados 4.3.4 - 4.3.6.
Wooldridge (2020): Apartado 9-5C.

Sección 15 de la guía *Introducción al Uso de EViews 4.1*.

En adelante IEV41 ...

PARTE 1 - DIAGNOSIS: RESUMEN

1 Parámetros (efectos causales):

1.1 Valores/signos: Variables omitidas (Sección 2.4), observaciones influyentes (PARTE 3).

1.2 Significación estadística: Variables irrelevantes, multicolinealidad (Sección 2.4).

2 Residuos (lo que queda "fuera" de un modelo estimado):

2.1 Los residuos no deben contener ningún tipo de información que resulte útil para mejorar el modelo estimado del que proceden. De manera equivalente, los residuos deben tener propiedades análogas a las que se imponen sobre las perturbaciones (HC3-HC5) para garantizar la optimalidad de MCO (los residuos deben ser "puramente aleatorios", o "ruido blanco"). Cualquier discrepancia significativa debe resolverse modificando el modelo estimado en la dirección adecuada [...].

2.2 Gráficos (PARTE 2):

A: Forma funcional.
B: También aportan información general sobre A-D en 2.3.

2.3 Operaciones específicas para detectar:

A: Heteroscedasticidad (HC4) (Sección 3.3).
B: Autocorrelación (HC4) (Tema 4).
C: Ausencia de Normalidad (HC5) (PARTE 2).
D: Observaciones atípicas (PARTE 3).

Observación importante: Con frecuencia, el incumplimiento de HC3-HC5 se debe a **errores de especificación** en la **forma funcional** del modelo y/o en el contenido del **conjunto de variables explicativas**, como se irá viendo en esta sección y en las siguientes [...].

PARTE 2 - DIAGNOSIS: GRÁFICOS DE RESIDUOS

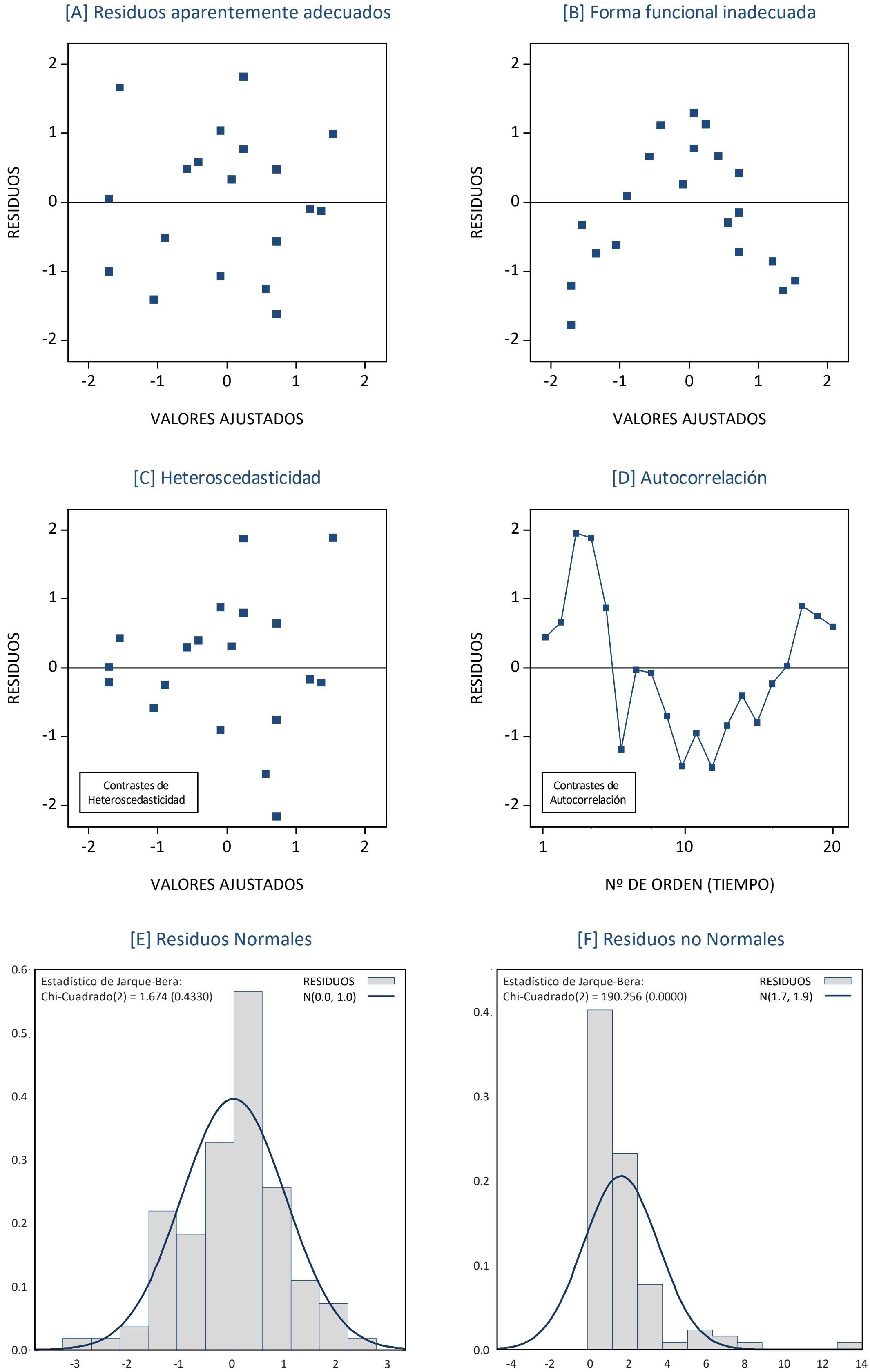
➪ Las hipótesis $\mathrm{E}[U_i \mid \mathbf{X}] = 0$ (HC3, exogeneidad estricta) y $\mathrm{E}[U_i^2 \mid \mathbf{X}] = \sigma^2$ (HC4, homoscedasticidad) sugieren que el **nivel medio** y la **dispersión** de los residuos deben ser **constantes** (en particular, deben ser independientes de los datos sobre todas las variable explicativas). Ambas hipótesis pueden contrastarse (informalmente) examinando las nubes de puntos de los residuos sobre cada variable explicativa y/o sobre los valores ajustados del modelo estimado (que son una combinación lineal de los datos sobre todas las variables explicativas). Ver Figura 1.

➪ Si el orden de las observaciones es relevante (series temporales), las dos hipótesis anteriores y la hipótesis $\mathrm{E}[U_{i_1} U_{i_2} \mid \mathbf{X}] = 0$ (HC4, ausencia de autocorrelación) también pueden contrastarse examinando un gráfico ordenado (temporal) de los residuos.

➪ La hipótesis de Normalidad (HC5) puede contrastarse con el histograma de los residuos y el estadístico de Jarque-Bera.

➪ El examen de los gráficos mencionados también ayuda a detectar **observaciones atípicas** que pueden influir notablemente en un modelo estimado (PARTE 3).

FIGURA 1
Gráficos de Residuos



IEV41: Sección 15 pp. 55-58

PARTE 3 - OBSERVACIONES INFLUYENTES

Una **observación** (punto muestral) es **influyente** si los resultados de la estimación de un modelo cambian notablemente al eliminar de la muestra dicha observación [Figuras 2-5]. En la práctica, la presencia de una observación influyente en una muestra puede deberse a:

- Un error en los datos que conforman dicha observación.
- La existencia de un punto muestral (una entidad o un momento) que es muy diferente del resto en algún aspecto relevante.

Una observación influyente del primer tipo debe corregirse (cuando es posible), o bien eliminarse del análisis (cuando no es posible corregirla). Una observación influyente del segundo tipo **no** debe eliminarse de manera rutinaria:

- Siempre debe ser examinada para intentar explicar su carácter especial.
- Su presencia puede indicar algún error de especificación que debe ser corregido.
- Sólo debe eliminarse en casos suficientemente justificados (cuando hace referencia a una entidad o a un momento que es especial por determinados motivos que carecen de interés en el análisis, o cuando distorsiona las conclusiones generales del mismo).

TIPOS DE OBSERVACIONES INFLUYENTES

- Una **observación** es **atípica** o **anómala** (*outlier*) cuando su dato de la **variable dependiente** destaca sobre los datos de dicha variable en otras observaciones que son, por el contrario, similares en cuanto a los datos de las variables explicativas. En general, una observación atípica es al mismo tiempo una observación influyente, que se manifiesta a través de un valor grande (atípico o anómalo) en el **residuo** correspondiente (Figura 2).

- Una **observación** es **extrema** o **potencialmente influyente** (*high-leverage point*) cuando sus datos de las **variables explicativas** destacan sobre los datos de dichas variables en el resto de la muestra. Una observación extrema es influyente cuando su dato de la variable dependiente **no** destaca del resto de la muestra (Figura 3). A diferencia del caso anterior, una observación extrema influyente **no** suele tener asociado un residuo atípico.

- Una observación extrema cuyo dato de la variable dependiente **sí** destaca del resto de la muestra, puede ser (Figura 4) o no (Figura 5) una observación influyente; cuando sí lo es, tampoco (como en el caso anterior) suele tener asociado un residuo atípico.

$$\left.\begin{array}{c}\text{Observación Atípica}\\ (\textit{Outlier})\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Destaca Y}\\ \text{No destaca X}\end{array}\right\} \rightarrow \text{Influyente [Figura 2].}$$

$$\left.\begin{array}{c}\text{Observación Extrema}\\ (\textit{High-Leverage Point})\end{array}\right\} \rightarrow \text{Destaca X} \rightarrow \left\{\begin{array}{ll}\text{No destaca Y} & \rightarrow \text{Influyente [Figura 3].}\\ \text{Destaca Y} & \rightarrow \text{Influyente [Figura 4] o no [Figura 5].}\end{array}\right.$$

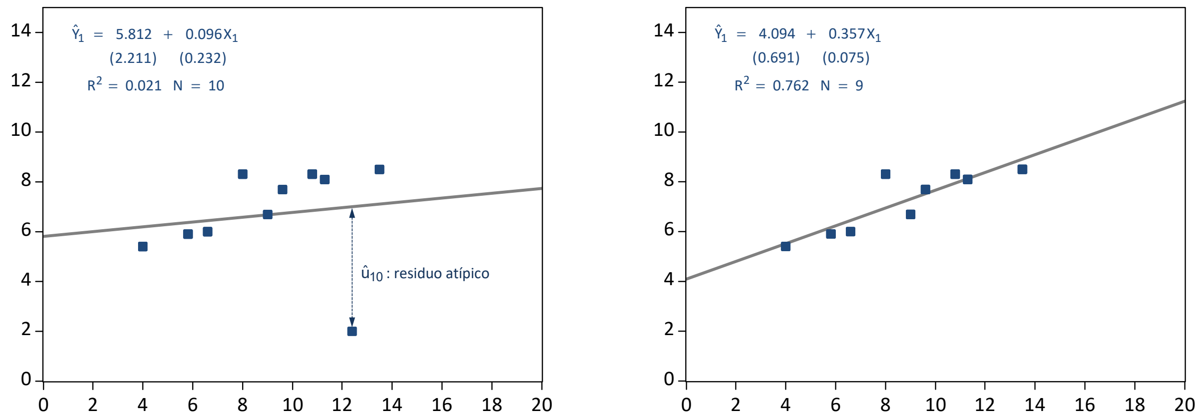
Los datos empleados para estimar los modelos RLS de las Figuras 2-5 son los de la Tabla 1. Las representaciones gráficas se han obtenido con EViews utilizando el programa PRG00-RLS.PRG, ajustando convenientemente la muestra (SAMPLE) utilizada en cada caso. [Ejemplo en clase Figura 2. Tareas Figuras 3-5.]

TABLA 1

Datos utilizados en las Figuras 2-5 - NUM03-OBSINF.WF1

OBS	Y1	Y2	Y3	Y4	X1	X2
1	8.3	6.6	6.6	6.6	10.8	6.0
2	6.0	5.7	5.7	5.7	6.6	6.6
3	6.7	7.3	7.3	7.3	9.0	7.6
4	7.7	8.5	8.5	8.5	9.6	6.5
5	8.1	8.8	8.8	8.8	11.3	7.8
6	8.5	7.0	7.0	7.0	13.5	7.0
7	5.9	8.0	8.0	8.0	5.8	7.5
8	5.4	7.5	7.5	7.5	4.0	6.5
9	8.3	6.4	6.4	6.4	8.0	5.4
10	2.0 *	8.5	1.0 *	12.6 *	12.4	14.0 *

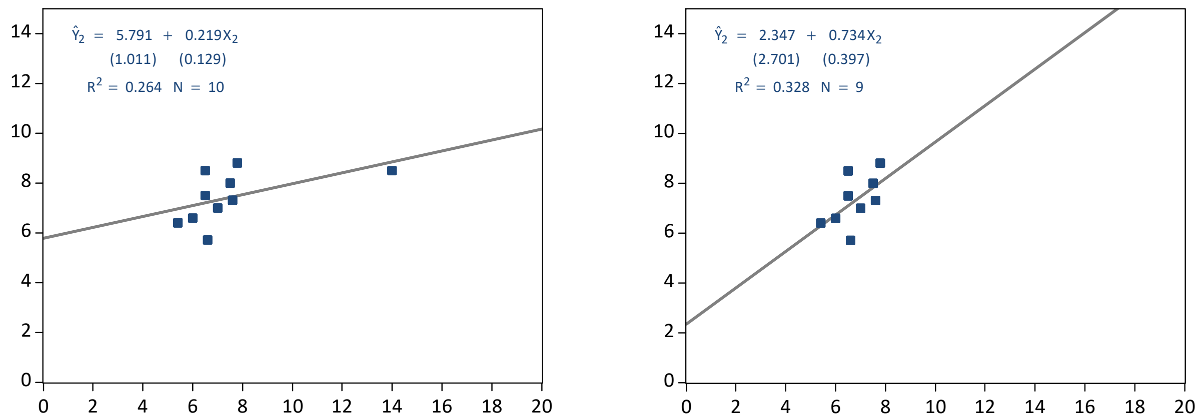
FIGURA 2



RLS de Y1 sobre X1 - Muestra completa

RLS de Y1 sobre X1 - Sin la observación nº 10

FIGURA 3



RLS de Y2 sobre X2 - Muestra completa

RLS de Y2 sobre X2 - Sin la observación nº 10

FIGURA 4

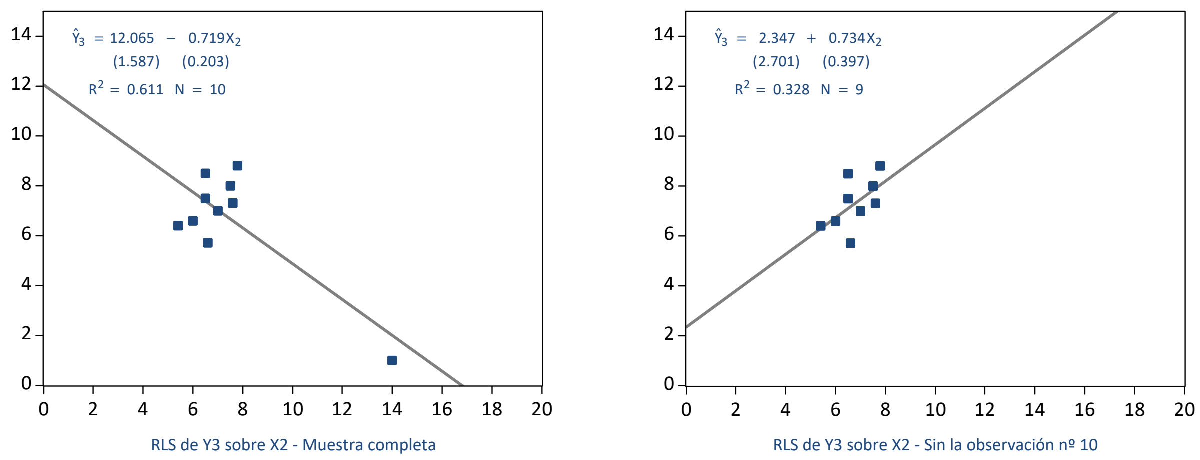
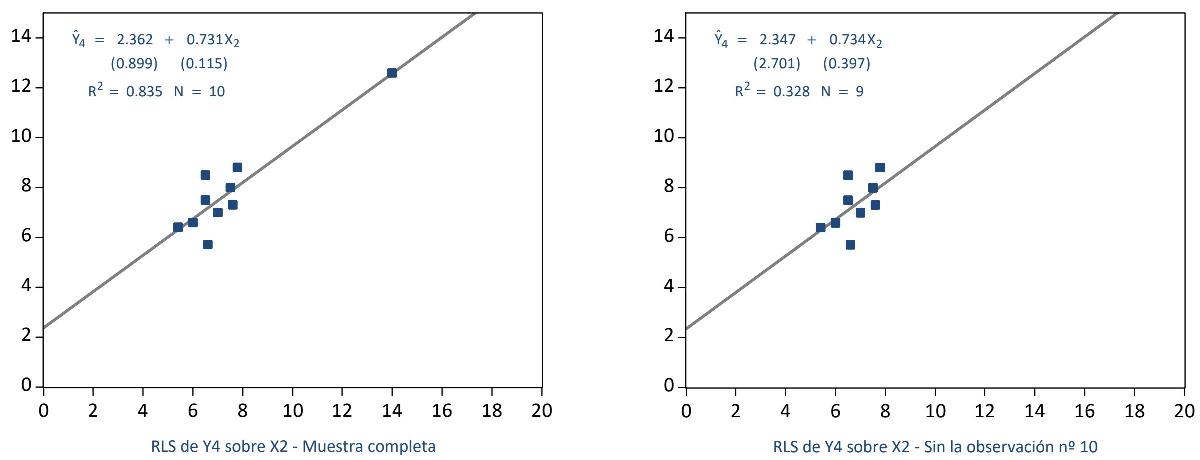


FIGURA 5



DETECCIÓN DE OBSERVACIONES INFLUYENTES

- **Observaciones atípicas** - Gráficos de residuos ($\Rightarrow$ residuos atípicos o anómalos).
- **Observaciones extremas** - Grados de influencia potencial (*leverage*):

$$h_{ii} = \mathbf{x}_i'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{x}_i \;(i = 1, ..., N) \Rightarrow 0 \le h_{ii} \le 1 \,(i = 1, ..., N), \textstyle\sum_{i=1}^{N} h_{ii} = K. \qquad [1]$$

Observación I: h_{ii} es el elemento en la i-ésima posición de la diagonal principal de la matriz $\mathbf{H} = \mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'$ [llamada a veces "matriz sombrero" (*hat matrix*) porque convierte a $\mathbf{y}$ en $\hat{\mathbf{y}}$: $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{Hy}$]. En un modelo RLS,

$$h_{ii} = \frac{1}{N} + \frac{(x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2} \;\; (i = 1, ..., N).$$

En general, un valor destacado de h_{ii} (por ejemplo, $h_{ii} > \frac{2K}{N}$) implica que los datos de las variables explicativas en la i-ésima observación destacan al compararlos con la media de los datos de dichas variables en la muestra completa.

➪ **Observaciones influyentes** en general - Estadísticos o distancias de Cook:

$$D_i = \frac{1}{K} \times \left[\frac{\hat{u}_i}{\hat{\sigma}\sqrt{1-h_{ii}}} \right]^2 \times \left[\frac{h_{ii}}{1-h_{ii}} \right] \; (i = 1, ..., N). \qquad [2]$$

Observación II: En D_i se combina información sobre el posible carácter atípico (a través del residuo $\hat{u}_i$) y/o extremo (a través del grado de influencia potencial h_{ii}) de cada observación muestral. La distancia D_i es una medida de la diferencia entre las estimaciones de los parámetros de un modelo obtenidas con la muestra completa y las obtenidas sin la i-ésima observación (o, equivalentemente, entre los valores ajustados asociados con ambas estimaciones). Por lo tanto, un valor destacado de D_i [por ejemplo, mayor que el valor crítico al 5% en una $F(K, N-K)$] suele implicar que la i-ésima observación muestral es una observación influyente.

EJEMPLO

Ver IEV41: Sección 15 pp. 58-60. Las medidas de influencia de Hadi (que pueden ayudar a detectar observaciones influyentes **enmascaradas**) son

$$H_i = \left[\frac{h_{ii}}{1-h_{ii}} \right] + \left[\frac{K}{1-h_{ii}} \right] \times \left[\frac{\hat{u}_i^2}{\text{SCR} - \hat{u}_i^2} \right] \; (i = 1, ..., N). \qquad [3]$$

Para otras medidas de influencia, ver Peña, D.; Yohai, V.J. (1995), "The Detection of Influential Subsets in Linear Regression by Using an Influence Matrix", *Journal of The Royal Statistical Society, Series B*, 57: 145-156.