

# ECONOMETRÍA APLICADA



## REGRESIÓN CON SERIES TEMPORALES

Departamento de Análisis Económico y Economía Cuantitativa  
Universidad Complutense de Madrid



EctrAp-JAM-TR3.pdf

Copyright © 2012 - 2023 J.A.M.  
[ucm.randomshock.com/ectrap](http://ucm.randomshock.com/ectrap)

Versión 11.0 - Diciembre 2023

## REGRESIÓN CON SERIES TEMPORALES

### BIBLIOGRAFÍA



Hill-Griffiths-Lim (2018): Capítulos 9 y 12.

Secciones 18 y 20 de la guía *Introducción al Uso de EViews 4.1*.

En adelante IEV41 ...

# CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
3.1 Objetivos	1
3.2 Series Estacionarias y Series No Estacionarias	1
<b>REGRESIÓN CON SERIES ESTACIONARIAS</b>	<b>2</b>
3.3 Modelos de Regresión con Autocorrelación	4
3.4 Regresión Dinámica	9
<b>REGRESIÓN CON SERIES NO ESTACIONARIAS</b>	<b>21</b>
3.5 Regresión Espuria	22
3.6 Cointegración	26
<b>RESUMEN</b>	<b>33</b>

## INTRODUCCIÓN

### 3.1 OBJETIVOS

Los habituales en el análisis de regresión (evaluación de efectos causales, previsión, ...), con atención especial a las posibles **relaciones dinámicas** entre las variables consideradas.

### 3.2 SERIES ESTACIONARIAS Y SERIES NO ESTACIONARIAS

Una **serie temporal estacionaria** es en este Tema 3 una serie con un nivel medio y una dispersión que son constantes (es decir, una serie estacionaria en varianza).

Una **serie temporal no estacionaria** es en este Tema 3 una serie sin estacionalidad, con un nivel medio general que no es constante, pero con una dispersión que sí lo es.

**Observación 1:** El único tipo de no estacionariedad que se considera en este Tema 3 es el que permite convertir a una serie no estacionaria en estacionaria aplicándole un número adecuado  $d \geq 1$  de diferencias regulares. Por lo tanto, se supone implícitamente que si una serie requiere alguna transformación de Box-Cox (típicamente, un logaritmo) o una diferencia estacional (o ambas cosas) para hacerla estacionaria, dichas transformaciones ya han sido tenidas en cuenta previamente. Es habitual referirse a series no estacionarias de este tipo como series integradas de orden  $d$ , ó  $I(d)$ . También suele decirse que una serie estacionaria es una serie integrada de orden 0, ó  $I(0)$ .

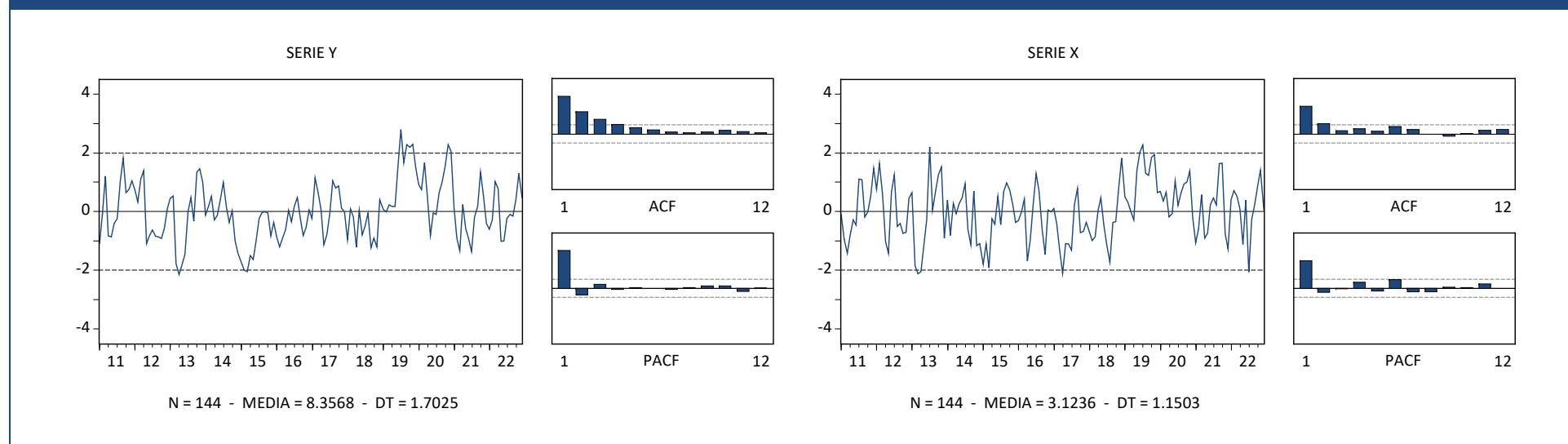
## REGRESIÓN CON SERIES ESTACIONARIAS

Los **residuos** de un modelo de regresión estimado por MCO con series estacionarias suelen presentar algún tipo de **autocorrelación**, lo que sugiere la posibilidad de que las **covarianzas** entre algunas **perturbaciones** del modelo considerado sean **distintas** de cero.

**FIGURA 3.1**

Dos Series Estacionarias Mensuales

ST29-REG-DINAM.WF1



**FIGURA 3.2**

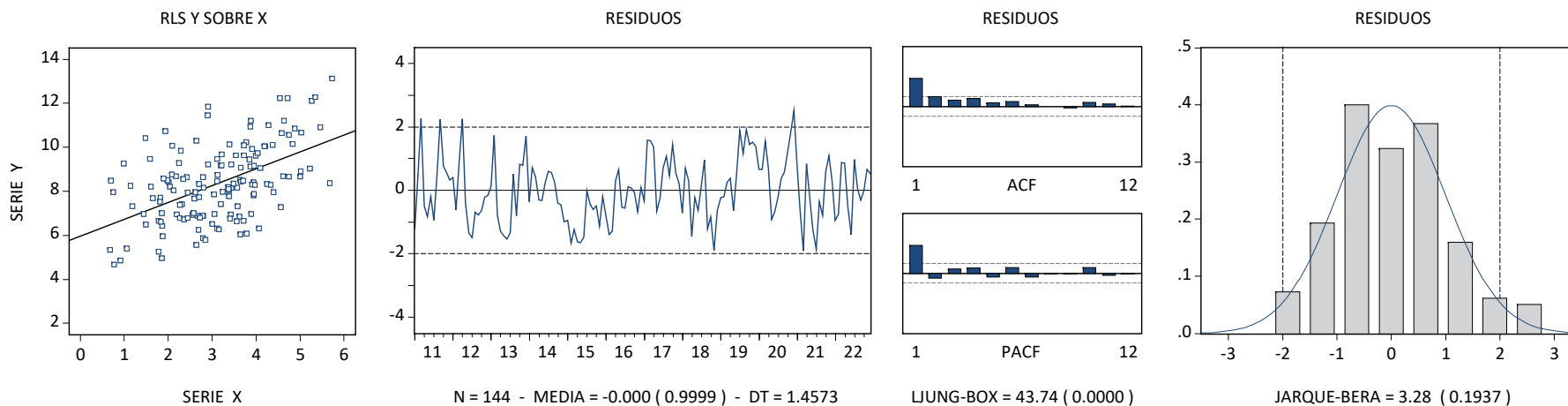
RLS de Y sobre X con los Datos de la Figura 3.1

$$y_t = 5.9669 + 0.7651x_t + \hat{u}_t,$$

$$(0.3538) \quad (0.1063)$$

$$[0.0000] \quad [0.0000]$$

$N = 144, \hat{\sigma} = 1.4625, AIC = 3.6120, BIC = 3.6532.$



### 3.3 MODELOS DE REGRESIÓN CON AUTOCORRELACIÓN

IEV41: Sección 18

⇒ Modelo RLS basado en las Figuras 3.1 - 3.2 con autocorrelación de orden 2:

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + U_t, \text{ con } E[U_t] = 0, \text{ Var}[U_t] = \sigma^2 \text{ (constante)},$$

$$\text{Corr}[U_{t_1}, U_{t_2}] = \text{Corr}[U_{t_2}, U_{t_1}] = \begin{cases} \rho_1 \neq 0, & \text{si } |t_1 - t_2| = 1, \\ \rho_2 \neq 0, & \text{si } |t_1 - t_2| = 2, \\ 0, & \text{si } |t_1 - t_2| > 2, \end{cases} \quad [1]$$

con  $t, t_1, t_2 = 1, \dots, N$ . En este caso, la matriz de varianzas de  $\mathbf{U} = [U_1, U_2, \dots, U_N]'$  es

$$\text{Var}[\mathbf{U}] = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & 0 & \dots & 0 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & 0 \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \rho_2 & \ddots & \ddots & \rho_1 & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ 0 & 0 & \dots & \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{V} \neq \sigma^2 \mathbf{I}, \quad [2]$$

donde  $\rho_1$  y  $\rho_2$  son las **autocorrelaciones** de órdenes 1 y 2 de  $\mathbf{U}$ .



⇒ Modelo RLM con autocorrelación general:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{U}, \text{ con } E[\mathbf{U}] = \mathbf{0}, \text{ Var}[\mathbf{U}] = \sigma^2 \mathbf{V}, \quad [3]$$

donde  $\mathbf{V}$  es una matriz simétrica **no diagonal** del siguiente estilo (en la que se impone la misma varianza para todas las perturbaciones del modelo y se permite la existencia de autocorrelación entre ellas hasta el máximo orden posible):

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3 & \dots & \rho_{N-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \rho_2 & \dots & \rho_{N-2} \\ \rho_2 & \rho_1 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho_3 & \rho_2 & \ddots & \ddots & \rho_1 & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \rho_1 & 1 & \rho_1 \\ \rho_{N-1} & \rho_{N-2} & \dots & \rho_2 & \rho_1 & 1 \end{bmatrix} \neq \mathbf{I}. \quad [4]$$

### 3.3.1 Consecuencias

Reemplazar en la RLM clásica la hipótesis de que  $\text{Var}[\mathbf{U}] = \sigma^2 \mathbf{I}$  por [3]-[4] implica que

$$E[\hat{\boldsymbol{\beta}}] = \boldsymbol{\beta}, \text{ pero} \\ \text{Var}[\hat{\boldsymbol{\beta}}] = \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{V}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \neq \sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}. \quad [5]$$

Ningún resultado basado en la expresión  $\sigma^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$  para  $\text{Var}[\hat{\boldsymbol{\beta}}]$  es aplicable ahora (por ejemplo, el Teorema de Gauss-Markov). Además, cualquier cálculo basado en la estimación  $\hat{\sigma}^2 (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$  de  $\text{Var}[\hat{\boldsymbol{\beta}}]$  es **incorrecto** (en particular, los errores estándar habituales de los estimadores MCO, como los de la Figura 3.2).

### 3.3.2 Detección

⇒ ACF - PACF residuales (como en la Figura 3.2).

**Observación 1:** Para determinar si las  $G$  primeras autocorrelaciones de las perturbaciones de un modelo de regresión son *conjuntamente* significativas, suele emplearse el valor calculado del estadístico de Ljung-Box

$$Q_{LB}(\hat{u}_t) = n(n+2) \sum_{i=1}^G \frac{r_i(\hat{u}_t)^2}{n-i},$$

donde  $n$  es el número de residuos  $\hat{u}_t$  disponibles y  $r_i(\hat{u}_t)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) son sus autocorrelaciones muestrales. Bajo la hipótesis de que  $\rho_1 = \dots = \rho_G = 0$ , el estadístico de Ljung-Box sigue aproximadamente una distribución  $\chi^2(G)$ .

⇒ Contraste de Breusch-Godfrey.

**Observación 2:** El contraste de Breusch-Godfrey se puede emplear para contrastar la hipótesis nula ( $H_0$ ) de que las perturbaciones de un modelo de regresión no están autocorrelacionadas, frente a la alternativa ( $H_1$ ) de que sí lo están hasta un orden  $P \geq 1$  determinado:

1. Estimar el modelo de regresión considerado por MCO y guardar los residuos  $\hat{u}_1, \hat{u}_2, \dots, \hat{u}_N$ .
2. Calcular el coeficiente de determinación normal  $R_p^2$  en la **regresión auxiliar** de  $\hat{u}_t$  sobre todas las variables explicativas del modelo considerado y las series  $\hat{u}_{t-1}, \dots, \hat{u}_{t-P}$ .
3. Calcular  $BG_P = N \times R_p^2$  (estadístico) y  $\alpha^* = \Pr[\chi^2(P) \geq BG_P]$  (p-valor). Si  $\alpha^*$  es suficientemente pequeño (menor que el nivel de significación escogido), rechazar  $H_0$  en favor de  $H_1$ .

#### Contraste de Breusch-Godfrey en el modelo RLS de la Figura 3.2

Con  $P = 1$  en  $H_1$ ,  $BG_1 = 144 \times 0.223806$ , donde 0.223806 es el coeficiente de determinación en la regresión con término constante de  $\hat{u}_t$  sobre  $x_t$  y  $\hat{u}_{t-1}$ . El nivel de significación marginal (p-valor) del contraste es

$$\alpha^* = \Pr[\chi^2(1) \geq 32.228] = 0.0000.$$

### 3.3.3 Utilización Adecuada de MCO

El **Estimador de Newey-West** es un estimador adecuado (robusto, consistente) de [5] en presencia de cualesquiera tipos de heteroscedasticidad y autocorrelación:

$$\text{Vâr}[\hat{\beta}]_{\text{NW}} = \frac{1}{N} \hat{\mathbf{Q}}^{-1} \hat{\mathbf{S}}_{\text{NW}} \hat{\mathbf{Q}}^{-1}, \text{ con}$$

$$\hat{\mathbf{Q}} = \frac{1}{N} \mathbf{X}'\mathbf{X} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t',$$

$$\hat{\mathbf{S}}_{\text{NW}} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \hat{u}_t^2 \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t' + \sum_{h=1}^H \left(1 - \frac{h}{H+1}\right) \left(\frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-h} [\hat{u}_t \hat{u}_{t+h} (\mathbf{x}_t \mathbf{x}_{t+h}' + \mathbf{x}_{t+h} \mathbf{x}_t')]\right),$$

donde donde  $\mathbf{x}_i'$  es la fila  $i$ -ésima de la matriz  $\mathbf{X}$ .

**Observación 3:** El número  $H \leq N - 1$  es tal que  $\text{Cov}[U_{t_1}, U_{t_2}] = 0$  para  $|t_1 - t_2| > H$ . En la práctica,  $H$  se escoge como la parte de entera del número  $N^{1/4}$ , o bien como la parte entera del número  $4(N/100)^{2/9}$ . Un ajuste muy común de la  $\hat{\mathbf{S}}_{\text{NW}}$  cuando se emplea con muestras cortas, consiste en multiplicar  $\hat{\mathbf{S}}_{\text{NW}}$  por  $\frac{N}{N-K}$  (este ajuste está implementado, por ejemplo, en EViews, así como la primera de las dos formas mencionadas para escoger  $H$  en  $\hat{\mathbf{S}}_{\text{NW}}$ ).

#### Estimaciones de Newey-West en el modelo RLS de la Figura 3.2

$$y_t = 5.9669 + 0.7651x_t + \hat{u}_t,$$

$$(0.4683)^* \quad * (0.1528)$$

$$[0.0000] \quad [0.0000]$$

$$N = 144, \hat{\sigma} = 1.4625, \text{AIC} = 3.6120, \text{BIC} = 3.6532.$$

### 3.4 REGRESIÓN DINÁMICA

IEV41: Sección 20

#### 3.4.1 Modelo ADL(1,1) [ ADL = *Autoregressive Distributed Lag* ]

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + U_t, \text{ con } |\beta_1| < 1. \quad [6]$$

[ Continuación Ejemplo Figuras 3.1 - 3.2 en Figura 3.3 ]

#### 3.4.2 Modelo ADL(r,s)

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \dots + \beta_r Y_{t-r} + \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + \dots + \gamma_s X_{t-s} + U_t, \quad [7]$$

o bien

$$\beta(B)Y_t = \beta_0 + \gamma(B)X_t + U_t, \quad [8]$$

con

$$\beta(B) = 1 - \beta_1 B - \dots - \beta_r B^r, \quad \gamma(B) = \gamma_0 + \gamma_1 B + \dots + \gamma_s B^s, \quad [9]$$

$$\text{todas las raíces de } \beta(x) = 0 \text{ fuera del círculo unitario.} \quad [10]$$

**Observación 4:** Suele decirse que un modelo de regresión es dinámico cuando su lado derecho incluye al menos un retardo de la variable dependiente (como en [6]-[7]).

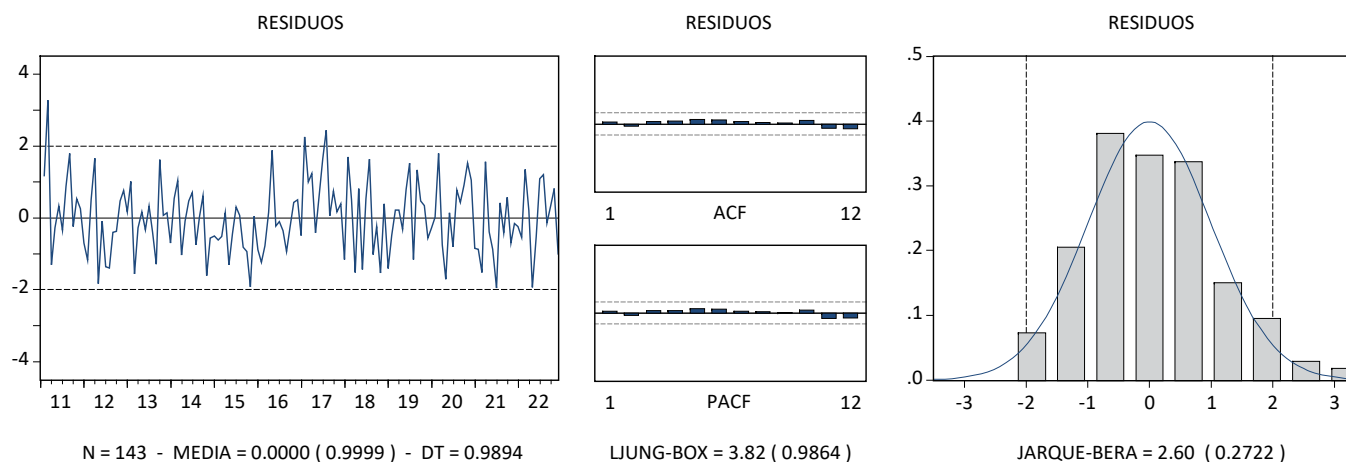
FIGURA 3.3

Modelo ADL(1,1) Alternativo al Modelo RLS de la Figura 3.2

$$y_t = 1.8849 + 0.4633y_{t-1} + 0.3814x_t + 0.4560x_{t-1} + \hat{u}_t,$$

(0.4437)	(0.0575)	(0.0838)	(0.0953)
[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]

$N = 143$ ,  $\hat{\sigma} = 1.0000$ ,  $AIC = 2.8655$ ,  $BIC = 2.9484$ ,  $BG_1 = 0.2405$  [0.6239].



### 3.4.3 Funciones de Respuesta

$$[8] \Rightarrow Y_t = \frac{\beta_0}{\beta(B)} + \frac{\gamma(B)}{\beta(B)} X_t + \frac{U_t}{\beta(B)} = \mu_0 + v(B)X_t + V_t, \text{ con} \quad [11]$$

$$\mu_0 = \frac{\beta_0}{\beta(1)}, \quad v(B) = \frac{\gamma(B)}{\beta(B)} = v_0 + v_1B + v_2B^2 + \dots, \quad \beta(B)V_t = U_t. \quad [12]$$

$$[11]-[12] \Rightarrow Y_t = \mu_0 + v_0X_t + v_1X_{t-1} + v_2X_{t-2} + \dots + V_t. \quad [13]$$

RESPUESTAS DE Y FRENTE A UNA VARIACIÓN UNITARIA DE X EN UN MOMENTO T		
[13] $\Rightarrow v_0 = \frac{\partial Y_T}{\partial X_T} \cdot v_1 = \frac{\partial Y_T}{\partial X_{T-1}} = \frac{\partial Y_{T+1}}{\partial X_T} \cdot v_2 = \frac{\partial Y_T}{\partial X_{T-2}} = \frac{\partial Y_{T+2}}{\partial X_T} \cdot \dots \Rightarrow v_k = \frac{\partial Y_T}{\partial X_{T-k}} = \frac{\partial Y_{T+k}}{\partial X_T} \quad (k \geq 0).$		
DESPUÉS DE K PERIODOS	RESPUESTA PUNTUAL DE Y	RESPUESTA ACUMULADA DE Y
K = 0 (MOMENTO T)	$v_0$	$e_0 = v_0$
K = 1 (MOMENTO T + 1)	$v_1$	$e_1 = v_0 + v_1$
K = 2 (MOMENTO T + 2)	$v_2$	$e_2 = v_0 + v_1 + v_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A "LARGO PLAZO"	0	$\mu_1 = v_0 + v_1 + v_2 + \dots = v(1)$

**Observación 5:** Un modelo ADL representa una relación de **causalidad unidireccional** del tipo  $(X_{t-k}) \rightarrow (Y_t)$  ( $k \geq 0$ ), a través de la **función de transferencia**  $v(B) = v_0 + v_1B + v_2B^2 + \dots$  de  $X_t$  sobre  $Y_t$ . La secuencia de coeficientes  $v_0, v_1, v_2, \dots$  se denomina la **función de respuesta al impulso (IRF)**, del inglés *Impulse Response Function*) del modelo ADL, en el sentido de que  $v_k = \partial Y_t / \partial X_{t-k} = \partial Y_{t+k} / \partial X_t$  ( $k \geq 0$ ). La secuencia de sumas parciales  $e_k = \sum_{i=0}^k v_i$  ( $k \geq 0$ ) se denomina la **función de respuesta al escalón (SRF)**, del inglés *Step Response Function*) del modelo ADL. [10]  $\Rightarrow$  la IRF converge a cero y la SRF converge a  $\mu_1 = \sum_{k=0}^{\infty} v_k = v(1) = \gamma(1)/\beta(1)$ , que se denomina la **ganancia a largo plazo** (*steady-state gain*) del modelo ADL. En la Figura 3.4 de la página siguiente están representadas la IRF y la SRF asociadas con la función de transferencia  $v(B)$  de varios modelos ADL de diferentes órdenes (ver [11]-[12]; en todos los casos  $\mu_1 = 1$ ):

Panel A :  $v(B) = 1$ . Panel B :  $v(B) = 0.5 + 0.5B$ . Panel C :  $v(B) = 0.25 + 0.5B + 0.25B^2$ .

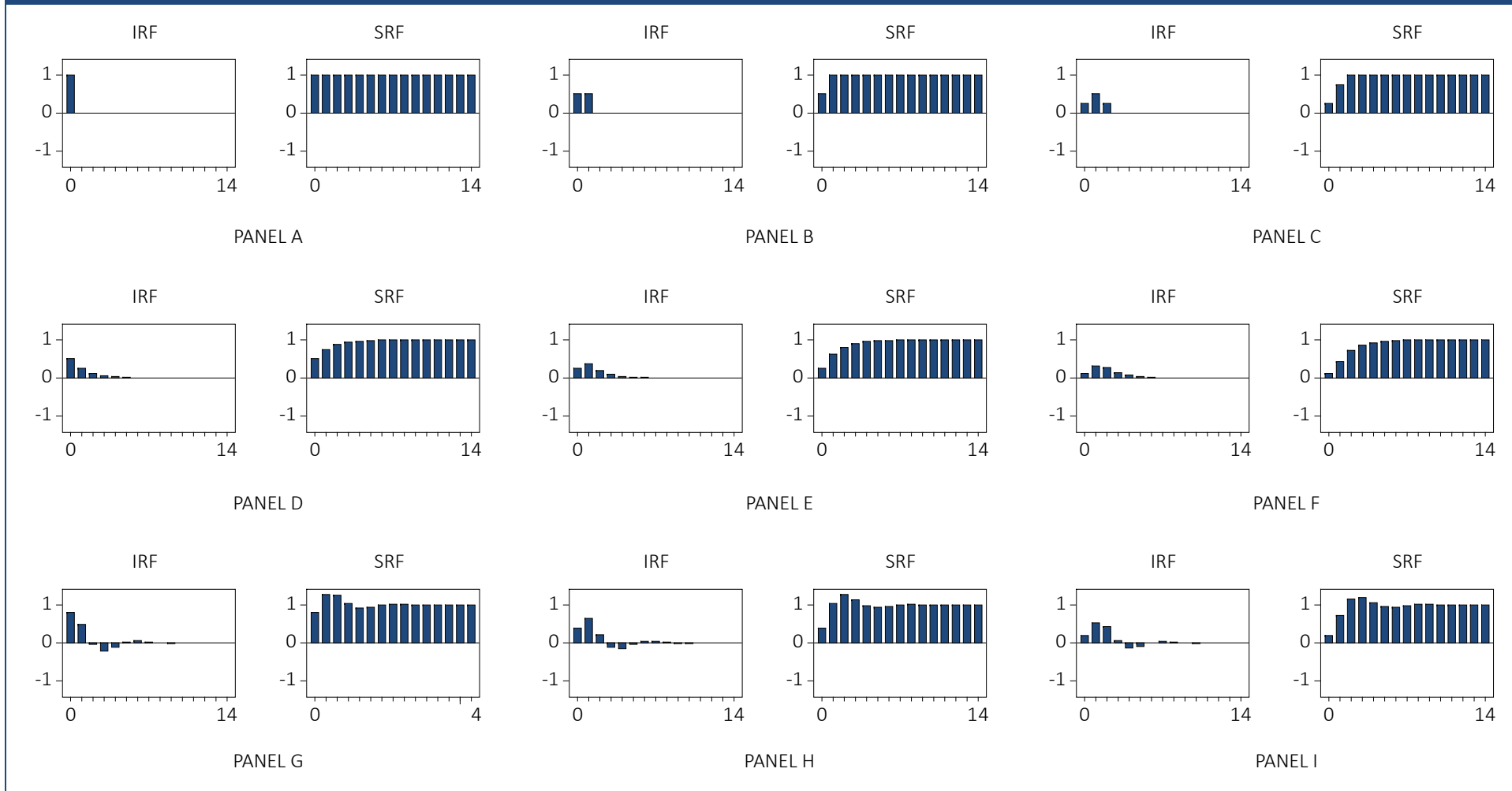
Panel D :  $v(B) = \frac{0.5}{1 - 0.5B}$ . Panel E :  $v(B) = \frac{0.25 + 0.25B}{1 - 0.5B}$ . Panel F :  $v(B) = \frac{0.125 + 0.25B + 0.125B^2}{1 - 0.5B}$ .

Panel G :  $v(B) = \frac{0.8}{1 - 0.6B + 0.4B^2}$ . Panel H :  $v(B) = \frac{0.4 + 0.4B}{1 - 0.6B + 0.4B^2}$ . Panel I :  $v(B) = \frac{0.2 + 0.4B + 0.2B^2}{1 - 0.6B + 0.4B^2}$ .

**Observación 6 - Casos Particulares de un Modelo ADL(1,1):** Si en [6] se supone que  $(U_t) \sim \text{IID}(0, \sigma_U^2)$ , entonces: (i) cuando  $\beta_1 = \gamma_1 = 0$ , [6] se reduce a un modelo RLS estático con perturbaciones IID; (ii) cuando  $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$ , [6] es un modelo AR(1); (iii) cuando  $\gamma_1 = -\beta_1\gamma_0$ , [6] se convierte en un modelo RLS con perturbaciones AR(1) del tipo  $Y_t = \mu_0 + \gamma_0 X_t + V_t$ , con  $V_t = \beta_1 V_{t-1} + U_t$  y (iv) cuando  $\beta_1 = 1$  y  $\gamma_1 = -\gamma_0$ , [6] se convierte en un modelo RLS estático entre  $\nabla Y_t$  y  $\nabla X_t$  con perturbaciones IID del tipo  $\nabla Y_t = \beta_0 + \gamma_0 \nabla X_t + U_t$ .



**FIGURA 3.4**  
Funciones de Respuesta al Impulso (IRF) y al Escalón (SRF) de Varios Modelos ADL



En relación con (iii) ( $\gamma_1 = -\beta_1\gamma_0$  en [6]):

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \gamma_0 X_t - \beta_1 \gamma_0 X_{t-1} + U_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \gamma_0 (X_t - \beta_1 X_{t-1}) + U_t \Rightarrow \\ &\Rightarrow (1 - \beta_1 B) Y_t = \beta_0 + \gamma_0 (1 - \beta_1 B) X_t + U_t \Rightarrow Y_t = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} + \gamma_0 X_t + \frac{U_t}{1 - \beta_1 B} \Rightarrow \\ &\Rightarrow Y_t = \mu_0 + \gamma_0 X_t + V_t, \text{ con } (1 - \beta_1 B) V_t = U_t, \text{ o bien } V_t = \beta_1 V_{t-1} + U_t. \end{aligned}$$

En relación con (iv) ( $\beta_1 = 1$  y  $\gamma_1 = -\gamma_0$  en [6]):

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_0 + Y_{t-1} + \gamma_0 X_t - \gamma_0 X_{t-1} + U_t \Rightarrow \\ &\Rightarrow Y_t - Y_{t-1} = \beta_0 + \gamma_0 (X_t - X_{t-1}) + U_t \Rightarrow \nabla Y_t = \beta_0 + \gamma_0 \nabla X_t + U_t. \end{aligned}$$

**Observación 7 - Cálculo de las Funciones de Respuesta:** En el modelo ADL(1,1) [6], la función de transferencia en [12] es

$$\begin{aligned} v(B) &= \frac{\gamma_0 + \gamma_1 B}{1 - \beta_1 B} = v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \dots \Rightarrow (1 - \beta_1 B)(v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \dots) = \gamma_0 + \gamma_1 B \\ &\Rightarrow v_0 + v_1 B + v_2 B^2 + \dots - \beta_1 v_0 B - \beta_1 v_1 B^2 - \beta_1 v_2 B^3 - \dots = \gamma_0 + \gamma_1 B. \end{aligned}$$

Igualando entre sí las cantidades que multiplican a cada potencia entera de  $B$  en los dos lados de esta expresión:

$$\begin{aligned} B^0 \quad (= 1) & : v_0 = \gamma_0, \\ B^1 \quad (= B) & : v_1 - \beta_1 v_0 = \gamma_1 \Rightarrow v_1 = \beta_1 v_0 + \gamma_1 = \beta_1 \gamma_0 + \gamma_1, \\ B^2 & : v_2 - \beta_1 v_1 = 0 \Rightarrow v_2 = \beta_1 v_1 = \beta_1^2 \gamma_0 + \beta_1 \gamma_1, \\ B^3 & : v_3 - \beta_1 v_2 = 0 \Rightarrow v_3 = \beta_1 v_2 = \beta_1^3 \gamma_0 + \beta_1^2 \gamma_1, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Por lo tanto, la IRF en un modelo ADL(1,1) es

$$v_0 = \gamma_0, v_k = \beta_1^k \gamma_0 + \beta_1^{k-1} \gamma_1 \quad (k \geq 1).$$

En modelos ADL de orden distinto de (1,1) los cálculos son semejantes. Una vez obtenida la IRF, la SRF se calcula (en cualquier modelo ADL) a partir de la IRF como la secuencia de sumas parciales  $e_k = \sum_{i=0}^k v_i$  ( $k \geq 0$ ).

#### 3.4.4 Representación ECM de un Modelo ADL(1,1) [ ECM = Error Correction Model ]

El modelo [6] puede escribirse de manera equivalente como se indica a continuación:

$$Y_t \quad [-Y_{t-1}] = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} \quad [-Y_{t-1}] + \gamma_0 X_t \quad [-\gamma_0 X_{t-1} + \gamma_0 X_{t-1}] + \gamma_1 X_{t-1} + U_t,$$

$$\nabla Y_t = \beta_0 - (1 - \beta_1) Y_{t-1} + \gamma_0 \nabla X_t + (\gamma_0 + \gamma_1) X_{t-1} + U_t,$$

$$\nabla Y_t = -(1 - \beta_1) \times \left[ Y_{t-1} - \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} - \frac{\gamma_0 + \gamma_1}{1 - \beta_1} X_{t-1} \right] + \gamma_0 \nabla X_t + U_t,$$

$$\nabla Y_t = \delta_1 \times [ Y_{t-1} - \mu_0 - \mu_1 X_{t-1} ] + \gamma_0 \nabla X_t + U_t, \text{ con} \quad [14]$$

$$\delta_1 = -(1 - \beta_1), \quad \mu_0 = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1}, \quad \mu_1 = \frac{\gamma_0 + \gamma_1}{1 - \beta_1}. \quad [15]$$

La expresión [14] se denomina un **modelo de corrección de error** (ECM).

El **término de error**  $[ Y_{t-1} - \mu_0 - \mu_1 X_{t-1} ]$  en [14] indica en qué medida las dos variables consideradas en el modelo ADL(1,1) [6] no satisfacen en el momento  $t - 1$  una relación del tipo

$$Y = \mu_0 + \mu_1 X = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1} + \frac{\gamma_0 + \gamma_1}{1 - \beta_1} X, \quad [16]$$

es decir, en qué medida  $Y_{t-1}$  no satisface una relación como [16] con  $X_{t-1}$ , o en qué medida tiene lugar un **desequilibrio** o un **error** en esa relación en el momento  $t - 1$ .

**Observación 8:** El parámetro  $\mu_0$  en [14]-[16] es el mismo que figura en [11]-[13] para un modelo ADL(1,1). Por su parte, el parámetro  $\mu_1$  en [14]-[16] es la **ganancia a largo plazo** (Observación 5) en un modelo ADL(1,1); por este motivo, [16] se denomina a veces la **relación a largo plazo** implícita en un modelo ADL(1,1).

Si en el modelo ADL(1,1) [6] ocurre que  $|\beta_1| < 1$ , entonces  $-2 < \delta_1 < 0$  en [14]. Por lo tanto, el **término de corrección de error**  $\delta_1 \times [ Y_{t-1} - \mu_0 - \mu_1 X_{t-1} ]$  en [14] representa una parte de  $\nabla Y_t = Y_t - Y_{t-1}$  que tiene el signo adecuado para corregir en cada momento  $t$  el desequilibrio (error) que tiene lugar en la relación [16] en  $t - 1$ . Por este motivo,  $-\delta_1$  (o  $-100 \times \delta_1$  en %) se denomina un **factor de corrección de error**. Nótese, en todo caso, que  $\nabla Y_t$  en [14] también depende de  $\nabla X_t$  (a través de  $\gamma_0$ ) y de  $U_t$ .

**Observación 9:** Conviene insistir en que [14] es tan sólo una forma alternativa de escribir el modelo ADL(1,1) [6]. Con otras palabras, [6] y [14] son dos versiones equivalentes del mismo modelo. El interés de considerarlas por separado reside en que cada una de ellas aporta información sobre aspectos diferentes (funciones de respuesta y mecanismo de corrección de error) de la relación entre las dos variables consideradas.

Las aclaraciones siguientes son importantes:

**09.1** De igual forma que los parámetros ECM en [14] se pueden expresar en función de los parámetros ADL en [6] como se indica en [15], también los parámetros ADL en [6] se pueden expresar en función de los parámetros ECM en [14] como se indica a continuación (nótese que  $\gamma_0$  es el mismo parámetro tanto en [6] como en [14]; ver Figura 3.5):

$$\beta_0 = -\delta_1\mu_0, \quad \beta_1 = \delta_1 + 1, \quad \gamma_1 = -\delta_1\mu_1 - \gamma_0.$$

**09.2** Los parámetros ECM en [14] se pueden estimar de dos formas:

- (1) Indirectamente, utilizando en [15] las estimaciones de los parámetros ADL en [6] calculadas por Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO) (porque [6] es un modelo de regresión lineal con respecto a todos sus parámetros).
- (2) Directamente, estimado [14] por **Mínimos Cuadrados No Lineales** (MCNL) (porque [14] es un modelo de regresión **no** lineal con respecto a algunos de sus parámetros; ver Hill, Griffiths, Lim (2018): Sección 6.6).

Las dos alternativas proporcionan exactamente los mismos resultados; no obstante, la alternativa (2) tiene la ventaja de que proporciona, al mismo tiempo que las estimaciones de los parámetros ECM en [14], las desviaciones típicas estimadas (los errores estándar) de los estimadores de dichos parámetros, en particular la del estimador de la ganancia a largo plazo  $\mu_1$  (Observación 8).

**09.3** La estimación de [6] por MCO (Figura 3.3) y la de [14] por MCNL proporcionan exactamente los mismos residuos y los mismos valores de los estadísticos habituales más relevantes (Figura 3.6).

**FIGURA 3.5**

Relaciones entre los Parámetros en las Representaciones [6] y [14] de un Modelo ADL(1,1)

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \gamma_0 X_t + \gamma_1 X_{t-1} + U_t,$$

$$\beta_0 = -\delta_1 \mu_0, \beta_1 = \delta_1 + 1, \gamma_1 = -\delta_1 \mu_1 - \gamma_0.$$

$$\nabla Y_t = \delta_1 \times [ Y_{t-1} - \mu_0 - \mu_1 X_{t-1} ] + \gamma_0 \nabla X_t + U_t,$$

$$\delta_1 = -(1 - \beta_1), \mu_0 = \frac{\beta_0}{1 - \beta_1}, \mu_1 = \frac{\gamma_0 + \gamma_1}{1 - \beta_1}.$$

**FIGURA 3.6**

Representaciones de la Figura 3.5 Estimadas con los Datos de la Figura 3.1

Dependent Variable: Y Method: Least Squares Sample(adjusted): 2001:02 2012:12 Included observations: 143 after adjusting endpoints				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.884865	0.443730	4.247772	0.0000
Y(-1)	0.463284	0.057477	8.060318	0.0000
X	0.381435	0.083803	4.551582	0.0000
X(-1)	0.456024	0.095330	4.783623	0.0000
R-squared	0.661842	Mean dependent var	8.369787	
Adjusted R-squared	0.654543	S.D. dependent var	1.701424	
S.E. of regression	1.000022	Akaike info criterion	2.865494	
Sum squared resid	139.0060	Schwarz criterion	2.948371	
Log likelihood	-200.8828	F-statistic	90.68332	
Durbin-Watson stat	1.923607	Prob(F-statistic)	0.000000	

Dependent Variable: D(Y) Method: Least Squares Sample(adjusted): 2001:02 2012:12 Included observations: 143 after adjusting endpoints D(Y) = C(1) * ( Y(-1) - C(2) - C(3) * X(-1) ) + C(4) * D(X)				
	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C(1)	-0.536716	0.057477	-9.337918	0.0000
C(2)	3.511845	0.580975	6.044742	0.0000
C(3)	1.560337	0.179745	8.680860	0.0000
C(4)	0.381435	0.083803	4.551582	0.0000
R-squared	0.467001	Mean dependent var	0.018621	
Adjusted R-squared	0.455498	S.D. dependent var	1.355219	
S.E. of regression	1.000022	Akaike info criterion	2.865494	
Sum squared resid	139.0060	Schwarz criterion	2.948371	
Log likelihood	-200.8828	Durbin-Watson stat	1.923607	

### 3.4.5 Estrategia General con Series Estacionarias

- ⇒ Estimar varios modelos ADL y seleccionar, entre aquellos cuyos residuos no presenten autocorrelación, el que mejor ajuste proporcione (contrastes de significación y criterios de información). Con frecuencia, un modelo ADL(1,1) es suficiente.
- ⇒ Para el modelo ADL seleccionado, [i] estimar la función de transferencia y la ganancia, [ii] representar las funciones de respuesta, [iii] estimar la representación ECM, y [iv] escribir la relación a largo plazo estimada y calcular y representar gráficamente la serie de desequilibrios (errores) estimados. Adicionalmente, un modelo ADL también puede utilizarse para calcular previsiones igual que con cualquier modelo de regresión.

### 3.4.6 Conclusión Ejemplo Figuras 3.1 - 3.3 [ Ver también Figuras 3.5 - 3.6 ]

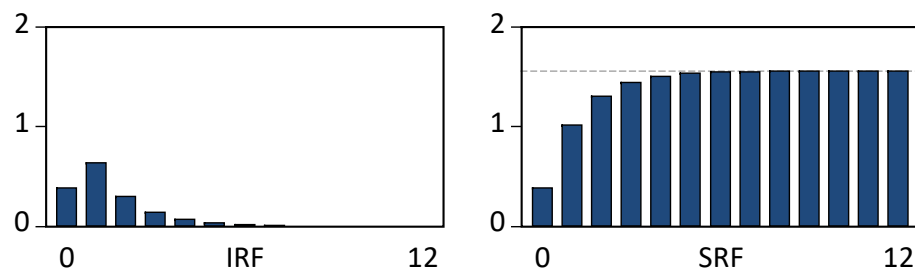
[i] Función de Transferencia y Ganancia Estimadas:

$$\hat{v}(B) = \frac{\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 B}{1 - \hat{\beta}_1 B} = 0.3814 + 0.6327B + 0.2931B^2 + 0.1358B^3 + \dots,$$

$$\hat{\mu}_1 = \hat{v}(1) = \frac{\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1}{1 - \hat{\beta}_1} = 1.5603.$$

**Observación:** El error estándar del estimador de la ganancia  $\mu_1$  se obtiene en el paso [iii].

[ii] Funciones de Respuesta Estimadas:



[iii] Representación ECM Estimada:

$$\nabla y_t = -0.5367 \times [ y_{t-1} - 3.5118 - 1.5603x_{t-1} ] + 0.3814\nabla x_t + \hat{u}_t,$$

(0.0575)	(0.5810)	(0.1797)	(0.0838)
[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]

$$N = 143, \hat{\sigma} = 1.0000, AIC = 2.8655, BIC = 2.9484, BG_1 = 0.2405 [0.6239].$$

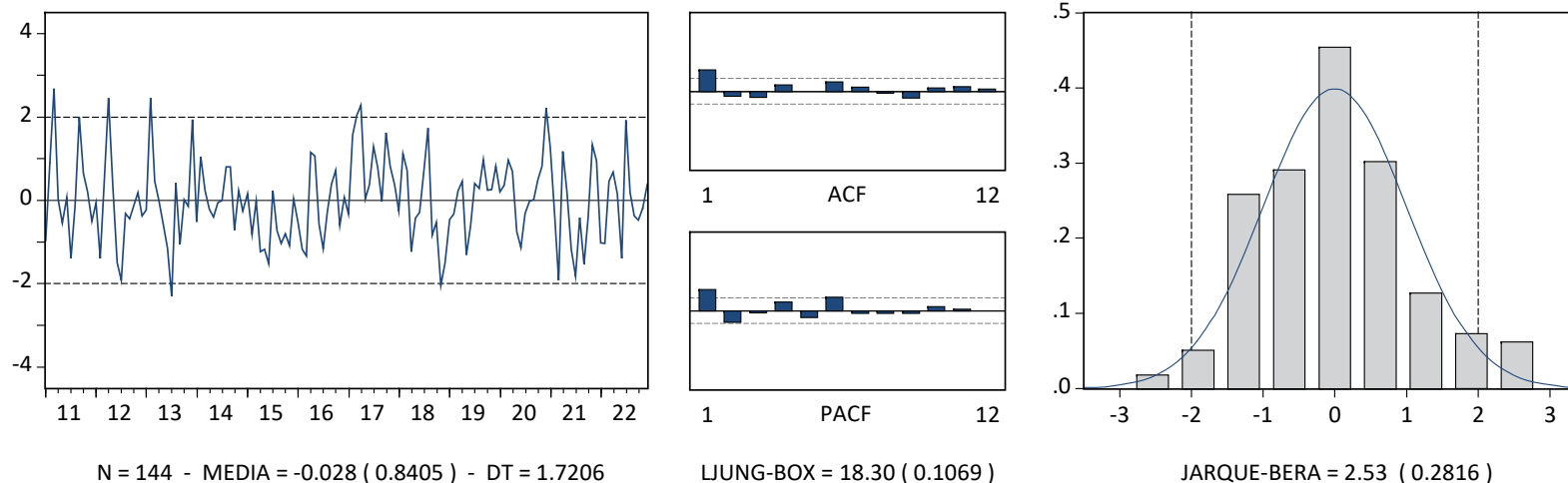
**Observación:** La serie de residuos  $\hat{u}_t$  es exactamente la misma que la de la Figura 3.3.

[iv] Relación a Largo Plazo y Serie de Desequilibrios Estimadas:

$$Y = \hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 X = 3.5118 + 1.5603 X.$$



Serie de desequilibrios (errores) estimada:  $y_t - \hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_1 x_t = y_t - 3.5118 - 1.5603x_t$ .



## REGRESIÓN CON SERIES NO ESTACIONARIAS

El problema principal en un análisis de regresión con series no estacionarias reside en la posibilidad de obtener resultados significativos al estimar relaciones entre series que en realidad no están relacionadas en absoluto. Dichas relaciones estimadas, que son tan sólo aparentes, se denominan **relaciones espurias** porque carecen de autenticidad.

### 3.5 REGRESIÓN ESPURIA

Las series A1 y A2 de la Figura 3.7 se han obtenido a partir de una serie  $a_1, a_2, \dots, a_{400}$  de 400 números aleatorios **independientes** procedentes de una distribución Normal(0,1):

$$a_{t1} = a_t, \quad a_{t2} = a_{200+t} \quad (t = 1, 2, \dots, 200).$$

Una serie de observaciones independientes con media cero (constante) y varianza constante (aunque no necesariamente igual a 1) es una serie estacionaria de tipo **ruido blanco**.

Las series Y1 e Y2 de la Figura 3.4 se han generado de la manera siguiente:

$$y_{11} = a_{11}, \quad y_{21} = a_{11} + a_{21}, \quad y_{31} = a_{11} + a_{21} + a_{31}, \dots \Rightarrow y_{t1} = \sum_{i=1}^t a_{i1} \quad (t = 1, 2, \dots, 200),$$

$$y_{12} = a_{12}, \quad y_{22} = a_{12} + a_{22}, \quad y_{32} = a_{12} + a_{22} + a_{32}, \dots \Rightarrow y_{t2} = \sum_{i=1}^t a_{i2} \quad (t = 1, 2, \dots, 200).$$

De manera equivalente,

$$y_{11} = a_{11}, \quad y_{t1} = y_{t-1,1} + a_{t1} \quad (t = 2, \dots, 200),$$

$$y_{12} = a_{12}, \quad y_{t2} = y_{t-1,2} + a_{t2} \quad (t = 2, \dots, 200),$$

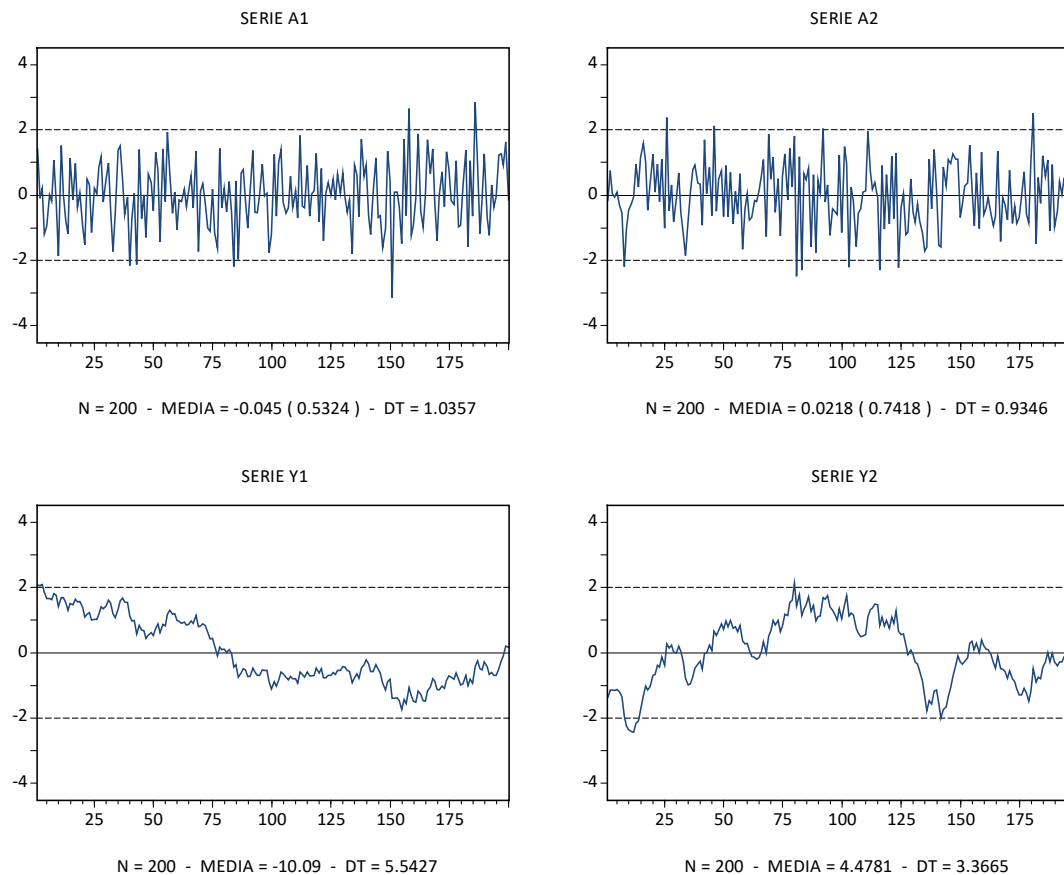
lo que implica que

$$\nabla y_{t1} = y_{t1} - y_{t-1,1} = a_{t1}, \quad \nabla y_{t2} = y_{t2} - y_{t-1,2} = a_{t2}.$$

Una serie de observaciones cuya primera diferencia regular es una serie de tipo ruido blanco (estacionaria) es una serie I(1) (no estacionaria) de tipo **paseo aleatorio**.

En resumen, (1) A1 y A2 son series estacionarias e independientes, y (2) Y1 e Y2 son series I(1) (no estacionarias) e independientes. En las Figuras 3.8 - 3.9 se resumen los resultados principales de la estimación de dos modelos RLS con las series A1 y A2 por un lado, y con las series Y1 e Y2 por otro.

**FIGURA 3.7**  
Series Simuladas Independientes Estacionarias e Integradas de Orden 1  
ST12-ESPUR.WF1



**FIGURA 3.8**

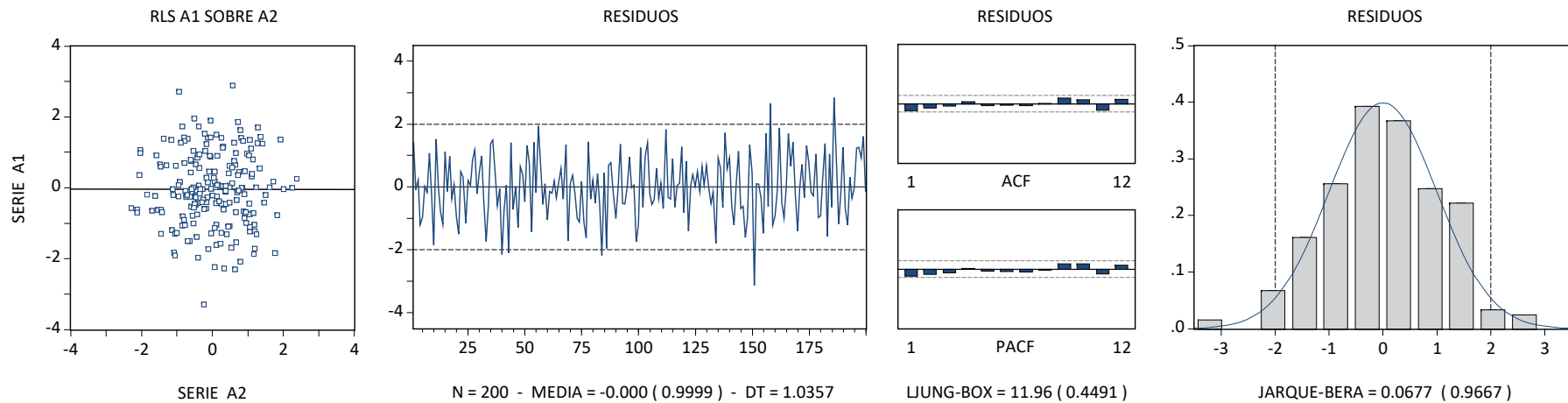
Modelo RLS Estimado con las Series A1 A2 de la Figura 3.7

$$a_{t1} = -0.0457 - 0.0021a_{t2} + \hat{u}_t,$$

$$(0.0734) \quad (0.0788)$$

$$[0.5430] \quad [0.9788]$$

$N = 200, \hat{\sigma} = 1.0383, AIC = 2.9230, BIC = 2.9560.$



**FIGURA 3.9**

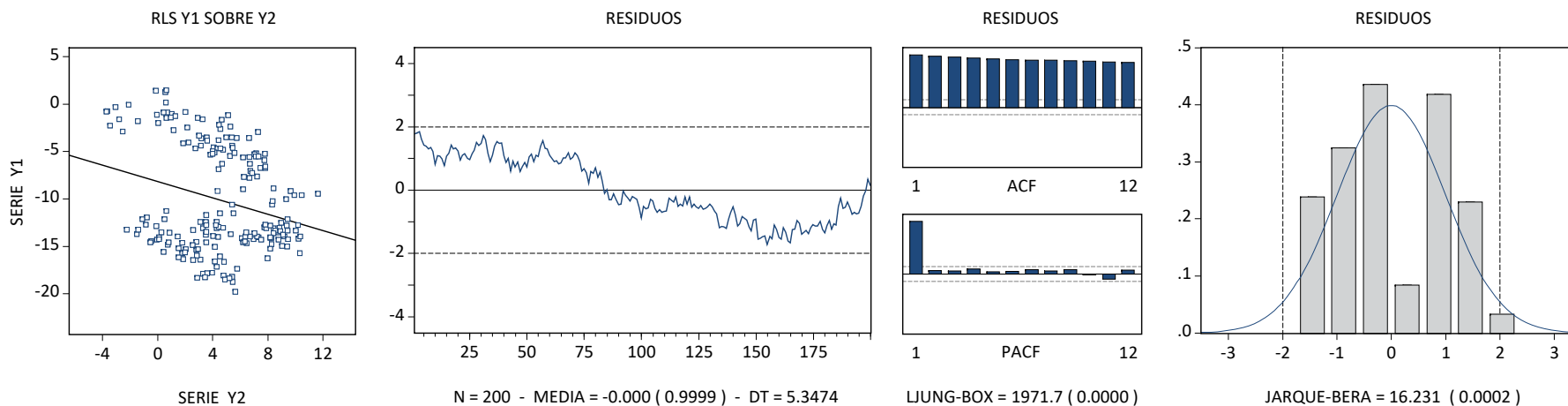
Modelo RLS Estimado con las Series Y1 Y2 de la Figura 3.7

$$y_{t1} = -8.1511 - 0.4331y_{t2} + \hat{u}_t,$$

(0.6319)
(0.1129)

[0.0000]
[0.0002]

$N = 200$ ,  $\hat{\sigma} = 5.3610$ ,  $AIC = 6.2061$ ,  $BIC = 6.2391$ .



En cualquier modelo de regresión estimado con series no estacionarias, el hecho de que los residuos sean también no estacionarios constituye el síntoma más claro de que la relación estimada es seguramente una relación espuria. La explicación está en que el modelo estimado no recoge la característica fundamental de la variable dependiente, que es su carácter no estacionario, por lo que dicho modelo no resume adecuadamente la información que contienen los datos y cualquier consecuencia extraída de él es seguramente errónea.

### 3.6 COINTEGRACIÓN

Como regla general, en un análisis de regresión no deben utilizarse directamente series no estacionarias para evitar el problema de la regresión espuria. Lo recomendable en este caso es transformar primero las series no estacionarias consideradas para hacerlas estacionarias, y proceder después como en el caso del análisis de regresión con series estacionarias.

No obstante, existe una excepción importante a esta regla: el caso en el que las **series no estacionarias** consideradas están **cointegradas**. Se dice que dos series temporales  $I(1)$  (no estacionarias) están cointegradas cuando existe una **combinación lineal** de dichas series que

es  $I(0)$  (estacionaria). Por lo tanto, aunque existen opciones más formales, una manera muy sencilla de comprobar si dos series  $y_t \sim I(1)$  y  $x_t \sim I(1)$  están cointegradas consiste en comprobar gráficamente si los **residuos** de una RLS con dichas series ( $\hat{u}_t = y_t - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_t$ ) son **estacionarios** (Figuras 3.10 - 3.11). De manera equivalente, dos series  $I(1)$  están cointegradas [1] cuando comparten una **tendencia semejante** y nunca se alejan de manera persistente (tan sólo de forma transitoria) la una de la otra, o [2] cuando dichas series están sujetas a una **relación estable o de equilibrio** entre ellas.

### 3.6.1 Modelos de Regresión para Series Cointegradas

Todo lo expuesto sobre regresión con series estacionarias es aplicable también al caso de la regresión con series no estacionarias cointegradas (Figura 3.12).

### 3.6.2 Regresión con Series No Estacionarias No Cointegradas

Para evitar el problema de la regresión espuria, la regla general en este caso consiste en transformar primero las series no estacionarias consideradas para hacerlas estacionarias, y proceder después como en el caso del análisis de regresión con series estacionarias.

**FIGURA 3.10**  
Series I(1) Cointegradas  
ST13-COINT.WF1

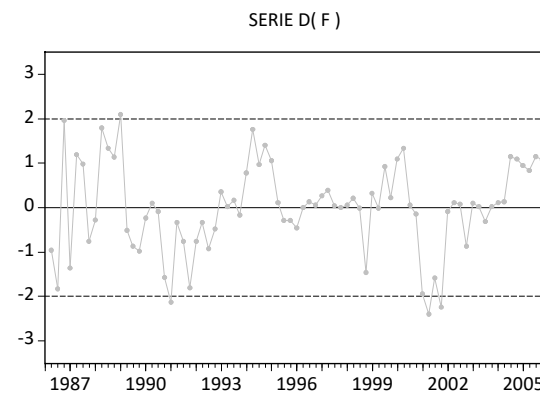
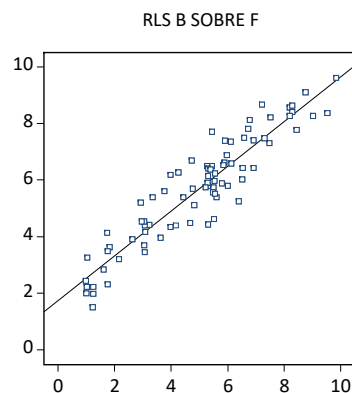
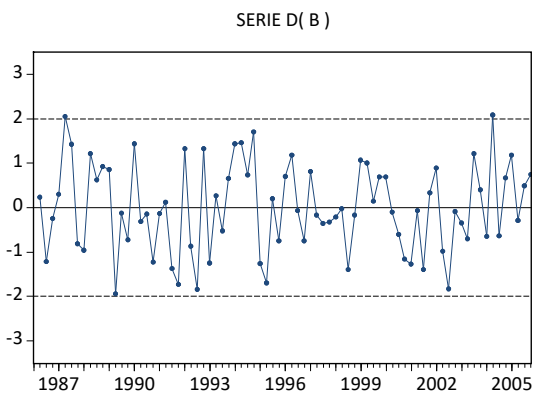
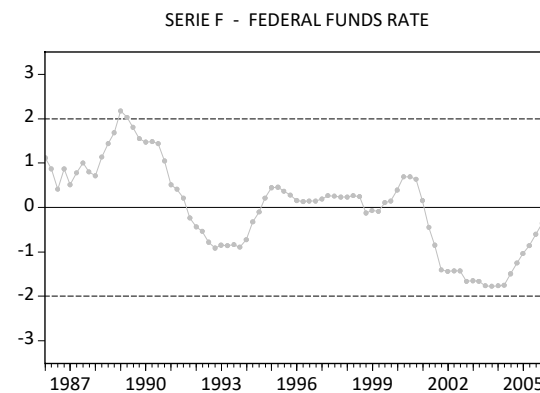
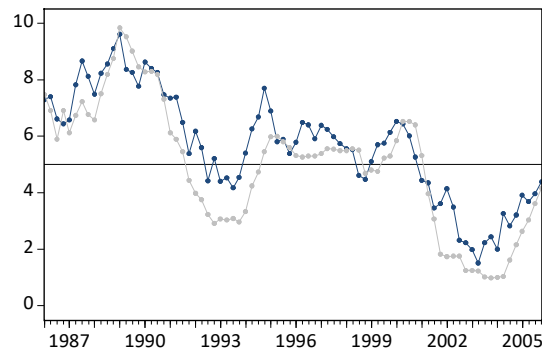
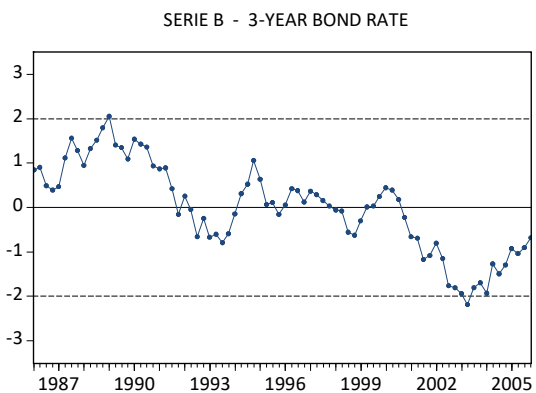




FIGURA 3.11

Modelo RLS Estimado con las Series B F de la Figura 3.10

$$b_t = 1.7487 + 0.7916f_t + \hat{u}_t,$$

(0.1914)            (0.0352)

[0.0000]            [0.0000]

$N = 80$ ,  $\hat{\sigma} = 0.7014$ ,  $AIC = 2.1532$ ,  $BIC = 2.2128$ ,  $BG_1 = 33.0834$  [0.0000].

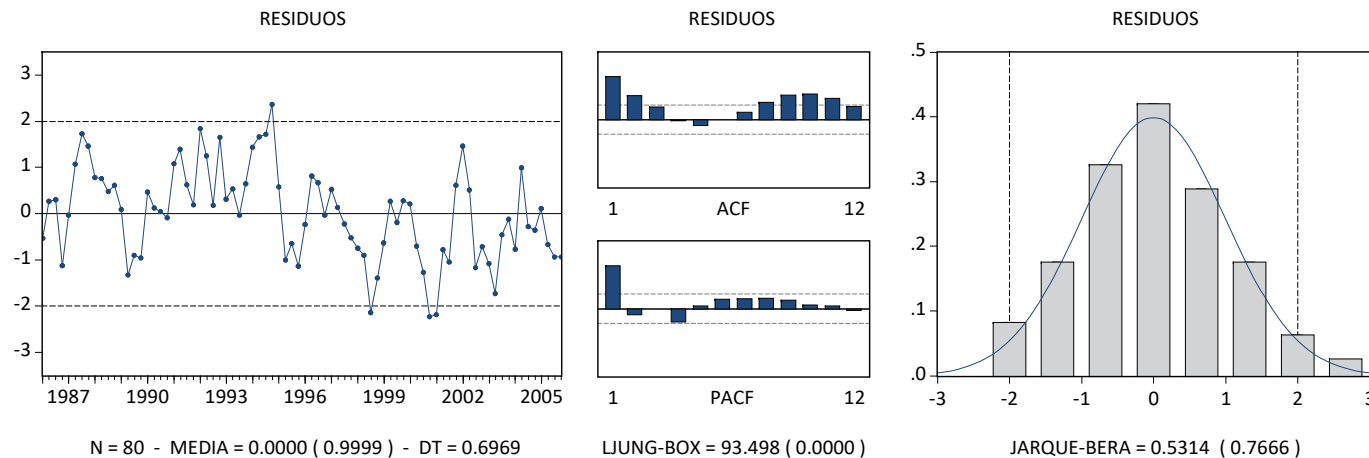


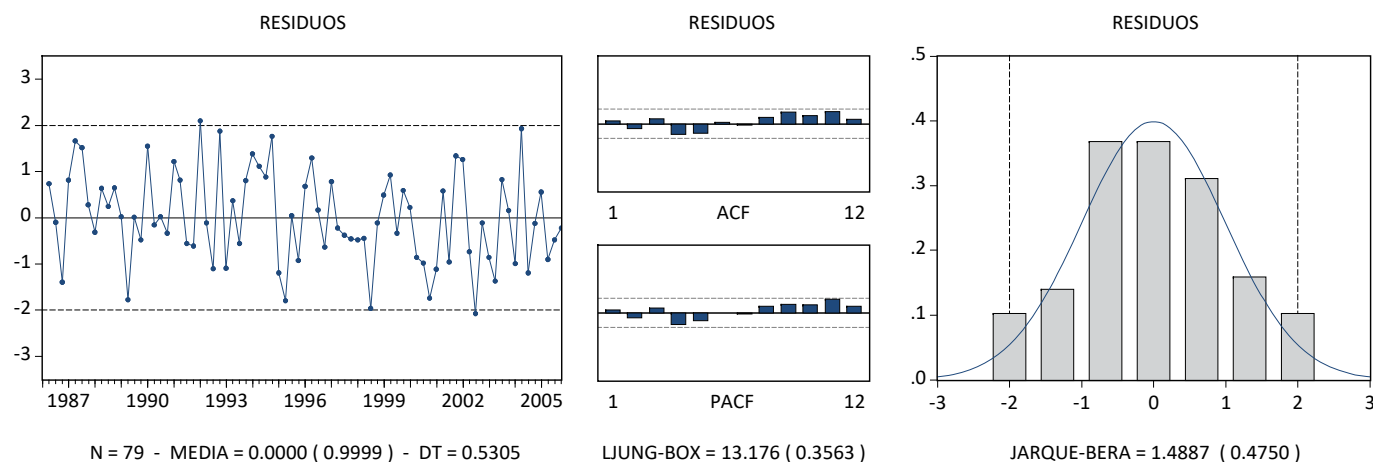
FIGURA 3.12

Modelo ADL(1,1) Estimado con las Series B F de la Figura 3.10

$$b_t = 0.5954 + 0.6972b_{t-1} + 0.6234f_t - 0.3986f_{t-1} + \hat{u}_t,$$

(0.2210)	(0.0966)	(0.1263)	(0.1169)
[0.0087]	[0.0000]	[0.0000]	[0.0000]

$N = 79$ ,  $\hat{\sigma} = 0.5411$ ,  $AIC = 1.6589$ ,  $BIC = 1.7788$ ,  $BG_1 = 0.2834$  [0.5945].

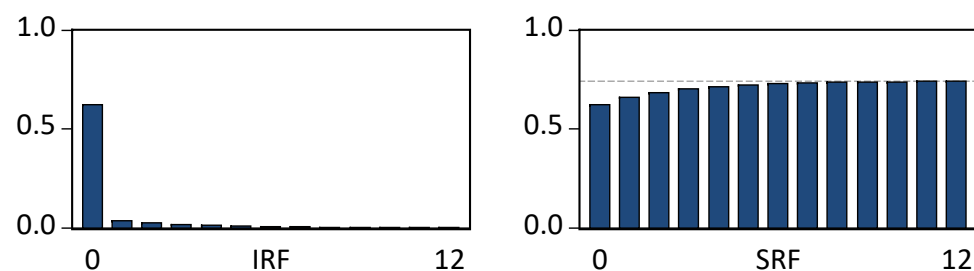


[i] Función de Transferencia y Ganancia Estimadas:

$$\hat{v}(B) = \frac{\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1 B}{1 - \hat{\beta}_1 B} = 0.6234 + 0.0361B + 0.0251B^2 + 0.0175B^3 + \dots,$$

$$\hat{\mu}_1 = \hat{v}(1) = \frac{\hat{\gamma}_0 + \hat{\gamma}_1}{1 - \hat{\beta}_1} = 0.7425.$$

[ii] Funciones de Respuesta Estimadas:



[iii] Representación ECM Estimada:

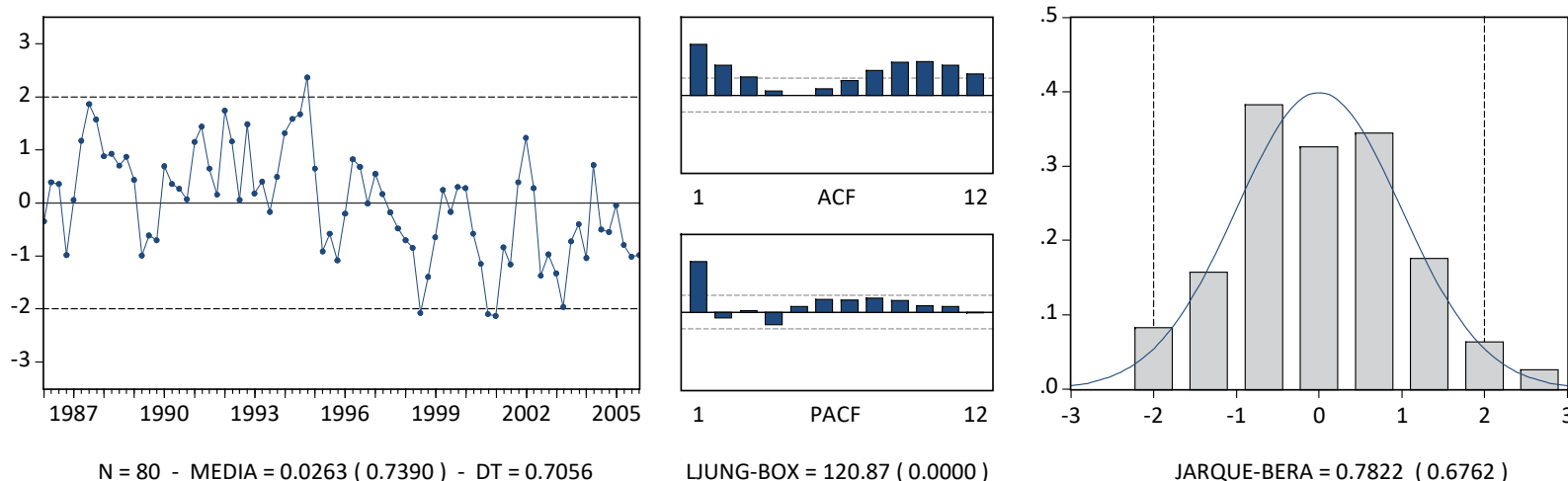
$$\nabla b_t = -0.3028 \times [ b_{t-1} - 1.9661 - 0.7425 f_{t-1} ] + 0.6234 \nabla f_t + \hat{u}_t.$$

(0.0966)	(0.4998)	(0.0932)	(0.1263)
[0.0025]	[0.0002]	[0.0000]	[0.0000]

[iv] Relación a Largo Plazo y Serie de Desequilibrios Estimadas:

$$B = \hat{\mu}_0 + \hat{\mu}_1 F = 1.9661 + 0.7425 F.$$

Serie de desequilibrios (errores) estimada:  $b_t - \hat{\mu}_0 - \hat{\mu}_1 f_t = b_t - 1.9661 - 0.7425 f_t$ .



**Observación Importante:** Para que la relación [16] implícita en la representación ECM de un modelo ADL tenga sentido como una relación a largo plazo entre las variables consideradas, los errores o desequilibrios a corto plazo deben ser transitorios (no persistentes), por lo que la serie de errores estimada debe ser estacionaria. Esto ocurre cuando las series consideradas en [16] son estacionarias (como en la [Sección 3.4](#)), o bien cuando son no estacionarias pero están cointegradas (como en la [Sección 3.6](#)); en caso contrario, la relación [16] es simplemente irrelevante.

## RESUMEN

- ⇒ **Series Estacionarias, o No Estacionarias Cointegradas:** En un análisis de regresión con las series originales (sin diferenciar), **no** existe el riesgo de encontrar relaciones espurias. En este caso, se debe utilizar las series sin diferenciar en el análisis de regresión que se pretenda llevar a cabo [por ejemplo, estimar varios modelos ADL y seleccionar, entre aquellos cuyos residuos no presenten autocorrelación, el que mejor ajuste proporcione; con frecuencia, un modelo ADL(1,1) es suficiente.]
- ⇒ **Series No Estacionarias No Cointegradas:** En un análisis de regresión con las series originales (sin diferenciar), **sí** existe el riesgo de encontrar relaciones espurias. En este caso, se debe diferenciar primero las series originales para hacerlas estacionarias, y utilizar las series estacionarias en el análisis de regresión que se pretenda llevar a cabo.

### OTRAS APLICACIONES DEL ANÁLISIS DE REGRESIÓN CON SERIES NO ESTACIONARIAS

S6 (opcional)