UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

ECONOMETRÍA APLICADA

Facultad de Ciencias
Económicas y Empresariales

2

ANÁLISIS UNIVARIANTE DE SERIES TEMPORALES

REPRESENTACIONES PSI - PI DE MODELOS ARMA

José Alberto Mauricio

Departamento de Análisis Económico y Economía Cuantitativa

MODELOS ARMA: REPRESENTACIONES PSI (MA) (WOLD) - PI (AR)

$$\phi(B)\tilde{Y}_t = \theta(B)A_t,$$
$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - ... - \phi_p B^p,$$
$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - ... - \theta_q B^q,$$
$$\tilde{Y}_t = Y_t - \mathrm{E}[Y_t].$$

$$\tilde{Y}_t = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} A_t,$$
$$\psi(B) = \frac{\theta(B)}{\phi(B)} = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + ... = \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^i \ \ (\psi_0 = 1), \qquad ①$$
$$\tilde{Y}_t = \psi(B)A_t \Rightarrow \tilde{Y}_t = A_t + \psi_1 A_{t-1} + \psi_2 A_{t-2} + ... \Rightarrow \psi_i = \frac{\partial \tilde{Y}_t}{\partial A_{t-i}} \ (i = 0, 1, 2, ...).$$

$$\frac{\phi(B)}{\theta(B)} \tilde{Y}_t = A_t,$$
$$\pi(B) = \frac{\phi(B)}{\theta(B)} = 1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - ... = -\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i B^i \ \ (\pi_0 = -1),$$
$$\pi(B)\tilde{Y}_t = A_t \Rightarrow \tilde{Y}_t - \pi_1 \tilde{Y}_{t-1} - \pi_2 \tilde{Y}_{t-2} - ... = A_t, \qquad ②$$
$$\tilde{Y}_t = \pi_1 \tilde{Y}_{t-1} + \pi_2 \tilde{Y}_{t-2} + ... + A_t \Rightarrow \pi_i = \frac{\partial \tilde{Y}_t}{\partial \tilde{Y}_{t-i}} \ (i = 1, 2, ...).$$

① $\Rightarrow$ $$\phi(B)\psi(B) = \theta(B). \qquad ③$$

② $\Rightarrow$ $$\theta(B)\pi(B) = \phi(B). \qquad ④$$

AR(1): $$(1 - \phi_1 B)\tilde{Y}_t = A_t \Rightarrow \phi(B) = 1 - \phi_1 B,\ \theta(B) = 1.$$

$$(1 - \phi_1 B)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + ...) = 1,$$
$$1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + ... - \phi_1 B - \phi_1\psi_1 B^2 - \phi_1\psi_2 B^3 - ... = 1.$$

③ $\Rightarrow$
$$B : \psi_1 - \phi_1 = 0 \Rightarrow \psi_1 = \phi_1,$$
$$B^2 : \psi_2 - \phi_1\psi_1 = 0 \Rightarrow \psi_2 = \phi_1\psi_1 = \phi_1^2,$$
$$B^3 : \psi_3 - \phi_1\psi_2 = 0 \Rightarrow \psi_3 = \phi_1\psi_2 = \phi_1^3,$$
$$\vdots$$
$$\psi_i = \phi_1\psi_{i-1} \ \text{para } i \geq 1 \ (\text{con } \psi_0 = 1) \Rightarrow \psi_i = \phi_1^i \ \text{para } i \geq 0.$$

④ $\Rightarrow$

$$1-\pi_1 B-\pi_2 B^2-\ldots=1-\phi_1 B,$$
$$\pi_1=\phi_1,\ \pi_i=0 \text{ para } i>1.$$

AR(2): $$(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2)\tilde{Y}_t=A_t \Rightarrow \phi(B)=1-\phi_1 B-\phi_2 B^2,\ \theta(B)=1.$$

$$(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2)(1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\ldots)=1,$$
$$1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\ldots-\phi_1 B-\phi_1\psi_1 B^2-\phi_1\psi_2 B^3-$$
$$-\ldots-\phi_2 B^2-\phi_2\psi_1 B^3-\phi_2\psi_2 B^4-\ldots=1.$$

③ $\Rightarrow$

$$B:\psi_1-\phi_1=0\Rightarrow\psi_1=\phi_1,$$
$$B^2:\psi_2-\phi_1\psi_1-\phi_2=0\Rightarrow\psi_2=\phi_1\psi_1+\phi_2=$$
$$=\phi_1\psi_1+\phi_2\psi_0\ \ (\psi_0=1),$$
$$B^3:\psi_3-\phi_1\psi_2-\phi_2\psi_1=0\Rightarrow\psi_3=\phi_1\psi_2+\phi_2\psi_1,$$
$$\vdots$$
$$\psi_i=\phi_1\psi_{i-1}+\phi_2\psi_{i-2} \text{ para } i\geq 2 \text{ (con } \psi_0=1,\ \psi_1=\phi_1).$$

④ $\Rightarrow$

$$1-\pi_1 B-\pi_2 B^2-\ldots=1-\phi_1 B-\phi_2 B^2,$$
$$\pi_1=\phi_1,\ \pi_2=\phi_2,\ \pi_i=0 \text{ para } i>2.$$

MA(1): $$\tilde{Y}_t=(1-\theta_1 B)A_t\Rightarrow\phi(B)=1,\ \theta(B)=1-\theta_1 B.$$

③ $\Rightarrow$

$$1+\psi_1 B+\psi_2 B^2+\ldots=1-\theta_1 B,$$
$$\psi_1=-\theta_1,\ \psi_i=0 \text{ para } i>1.$$

$$(1-\theta_1 B)(1-\pi_1 B-\pi_2 B^2-\ldots)=1,$$
$$1-\pi_1 B-\pi_2 B^2-\ldots-\theta_1 B+\theta_1\pi_1 B^2+\theta_1\pi_2 B^3+\ldots=1.$$

④ $\Rightarrow$

$$B:-\pi_1-\theta_1=0\Rightarrow\pi_1=-\theta_1,$$
$$B^2:-\pi_2+\theta_1\pi_1=0\Rightarrow\pi_2=\theta_1\pi_1=-\theta_1^2,$$
$$B^3:-\pi_3+\theta_1\pi_2=0\Rightarrow\pi_3=\theta_1\pi_2=-\theta_1^3,$$
$$\vdots$$
$$\pi_i=\theta_1\pi_{i-1} \text{ para } i\geq 1 \text{ (con } \pi_0=-1)\Rightarrow\pi_i=-\theta_1^i \text{ para } i\geq 0.$$

MA(2): $\tilde{Y}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)A_t \Rightarrow \phi(B) = 1,\ \theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2.$

③⇒
$$1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + ... = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2,$$
$$\psi_1 = -\theta_1, \psi_2 = -\theta_2, \psi_i = 0 \text{ para } i > 2.$$

$$(1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - ...) = 1,$$
$$1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - ... - \theta_1 B + \theta_1\pi_1 B^2 + \theta_1\pi_2 B^3 + ... -$$
$$-\theta_2 B^2 + \theta_2\pi_1 B^3 + \theta_2\pi_2 B^4 + ... = 1.$$

④ ⇒
$$B : -\pi_1 - \theta_1 = 0 \Rightarrow \pi_1 = -\theta_1,$$
$$B^2 : -\pi_2 + \theta_1\pi_1 - \theta_2 = 0 \Rightarrow \pi_2 = \theta_1\pi_1 - \theta_2 =$$
$$= \theta_1\pi_1 + \theta_2\pi_0 \ \ (\pi_0 = -1),$$
$$B^3 : -\pi_3 + \theta_1\pi_2 + \theta_2\pi_1 = 0 \Rightarrow \pi_3 = \theta_1\pi_2 + \theta_2\pi_1,$$
$$\vdots$$
$$\pi_i = \theta_1\pi_{i-1} + \theta_2\pi_{i-2} \text{ para } i \geq 2 \text{ (con } \pi_0 = -1, \pi_1 = -\theta_1).$$

ARMA(1,1): $(1 - \phi_1 B)\tilde{Y}_t = (1 - \theta_1 B)A_t \Rightarrow \phi(B) = 1 - \phi_1 B,\ \theta(B) = 1 - \theta_1 B.$

$$(1 - \phi_1 B)(1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + ...) = 1 - \theta_1 B,$$
$$1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + ... - \phi_1 B - \phi_1\psi_1 B^2 - \phi_1\psi_2 B^3 - ... = 1 - \theta_1 B.$$

③ ⇒
$$B : \psi_1 - \phi_1 = -\theta_1 \Rightarrow \psi_1 = \phi_1 - \theta_1,$$
$$B^2 : \psi_2 - \phi_1\psi_1 = 0 \Rightarrow \psi_2 = \phi_1\psi_1 = \phi_1(\phi_1 - \theta_1),$$
$$B^3 : \psi_3 - \phi_1\psi_2 = 0 \Rightarrow \psi_3 = \phi_1\psi_2 = \phi_1^2(\phi_1 - \theta_1),$$
$$\vdots$$
$$\psi_i = \phi_1\psi_{i-1} \text{ para } i \geq 2 \text{ (con } \psi_1 = \phi_1 - \theta_1) \Rightarrow \psi_i = \phi_1^{i-1}(\phi_1 - \theta_1) \text{ para } i \geq 1.$$

$$(1 - \theta_1 B)(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - ...) = 1 - \phi_1 B,$$
$$1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - ... - \theta_1 B + \theta_1\pi_1 B^2 + \theta_1\pi_2 B^3 + ... = 1 - \phi_1 B.$$

④ ⇒
$$B : -\pi_1 - \theta_1 = -\phi_1 \Rightarrow \pi_1 = \phi_1 - \theta_1,$$
$$B^2 : -\pi_2 + \theta_1\pi_1 = 0 \Rightarrow \pi_2 = \theta_1\pi_1 = \theta_1(\phi_1 - \theta_1),$$
$$B^3 : -\pi_3 + \theta_1\pi_2 = 0 \Rightarrow \pi_3 = \theta_1\pi_2 = \theta_1^2(\phi_1 - \theta_1),$$
$$\vdots$$
$$\pi_i = \theta_1\pi_{i-1} \text{ para } i \geq 2 \text{ (con } \pi_1 = \phi_1 - \theta_1) \Rightarrow \pi_i = \theta_1^{i-1}(\phi_1 - \theta_1) \text{ para } i \geq 1.$$

En modelos estacionarios $\psi_i \to 0$. En modelos invertibles $\pi_i \to 0$.

Los coeficientes ψ_i y π_i $(i = 1, 2, ...)$ se pueden calcular en modelos estacionarios e invertibles (como en los ejemplos anteriores, en cuyo caso $\psi_i \to 0$ y $\pi_i \to 0$), y también, en particular, en **modelos no estacionarios** que incluyan alguna/s diferencia/s regular/es y/o estacional (en cuyo caso la secuencia $\psi_1, \psi_2, \ldots$ **no** converge a cero). En cualquier caso, los coeficientes $\psi_1, \psi_2, \ldots$ son útiles para expresar los errores de previsión y sus varianzas en cualquier **modelo** de tipo **ARIMA**. Por su parte, la secuencia $\pi_1, \pi_2, \ldots$ resume en cualquier modelo la dependencia de una serie con respecto a su propio pasado, lo que suele requerir, desde un punto de vista práctico, la invertibildad del modelo considerado.

IMA(1,1): $\nabla Y_t = (1 - \theta_1 B) A_t$.

Este modelo es un ARMA(1,1) con $\phi_1 = 1$ (no estacionario). Por lo tanto:

$$\psi_i = \psi_{i-1} \text{ para } i \geq 2 \text{ (con } \psi_1 = 1 - \theta_1) \Rightarrow \psi_i = (1 - \theta_1) \text{ para } i \geq 1,$$

que **no** convergen a cero porque el modelo **no** es estacionario ($\phi_1 = 1$),

$$\pi_i = \theta_1 \pi_{i-1} \text{ para } i \geq 2 \text{ (con } \pi_1 = 1 - \theta_1) \Rightarrow \pi_i = \theta_1^{i-1}(1 - \theta_1) \text{ para } i \geq 1,$$

que convergen exponencialmente a cero si el modelo es invertible, es decir, si $|\theta_1| < 1$. Por ejemplo, en un modelo IMA(1,1) con $\theta_1 = 0.8$, ocurre lo siguiente: