UNIVERSIDAD COMPLUTENSE
MADRID

ECONOMETRÍA APLICADA

Facultad de Ciencias
Económicas y Empresariales

2

ANÁLISIS UNIVARIANTE DE SERIES TEMPORALES

PREVISIÓN CON MODELOS ARIMA

José Alberto Mauricio

Departamento de Análisis Económico y Economía Cuantitativa

1. PREVISIÓN CON MODELOS ARIMA - ASPECTOS TEÓRICOS

$$Y_t \sim \text{ARIMA}(p,d,q) \times \text{ARIMA}(P,D,Q)_S$$

Previsión puntual de Y_t en **origen** N a **horizonte** $l \geq 1$:

$$Y_N(l) = \text{E}_N[Y_{N+l}], \text{ con } l = 1,\, 2,\, ... \qquad [1]$$

Error de previsión en **origen** N a **horizonte** $l \geq 1$:

$$\mathcal{E}_N^Y(l) = Y_{N+l} - Y_N(l), \text{ con } l = 1,\, 2,\, ... \qquad [2]$$

EJEMPLO - Previsión con un Modelo AR(1):

1. Escribir el modelo dejando en su lado izquierdo solamente Y_t:

$$Y_t = \mu + \phi_1 Y_{t-1} + A_t\,. \qquad [3]$$

2. Escribir la expresión [3] del paso 1 en $t = N + l$:

$$Y_{N+l} = \mu + \phi_1 Y_{N+l-1} + A_{N+l}\,. \qquad [4]$$

3. Aplicar $\text{E}_N[\,\cdot\,]$ a la expresión [4] del paso 2 para obtener $Y_N(l)$ en [1]:

$$Y_N(l) = \mu + \phi_1 \text{E}_N[Y_{N+l-1}] + \text{E}_N[A_{N+l}]. \qquad [5]$$

4. Particularizar y desarrollar la expresión [5] del paso 3 para $l = 1,\, 2,\, 3,\, ...$:

$l = 1$:
$$\begin{aligned} Y_N(1) &= \mu + \phi_1 \underbrace{\text{E}_N[Y_N]}_{Y_N \text{ (R1)}} + \underbrace{\text{E}_N[A_{N+1}]}_{0 \text{ (R4)}} \\ &= \mu + \phi_1 Y_N\,. \end{aligned} \qquad [5.1]$$

$l = 2$:
$$\begin{aligned} Y_N(2) &= \mu + \phi_1 \underbrace{\text{E}_N[Y_{N+1}]}_{Y_N(1) \text{ (R3)}} + \underbrace{\text{E}_N[A_{N+2}]}_{0 \text{ (R4)}} \\ &= \mu + \phi_1 Y_N(1) \\ &= \mu + \phi_1[\mu + \phi_1 Y_N] = (1+\phi_1)\mu + \phi_1^2 Y_N\,. \end{aligned} \qquad [5.2]$$

$$Y_N(3) = \mu + \phi_1 \underbrace{\mathrm{E}_N[Y_{N+2}]}_{Y_N(2)\ (\mathrm{R3})} + \underbrace{\mathrm{E}_N[A_{N+3}]}_{0\ (\mathrm{R4})}$$

$l = 3$:

$$\begin{aligned} &= \mu + \phi_1 Y_N(2) \\ &= \mu + \phi_1[(1+\phi_1)\mu + \phi_1^2 Y_N] = (1 + \phi_1 + \phi_1^2)\mu + \phi_1^3 Y_N\,. \end{aligned} \quad [5.3]$$

...

5. Generalizar las expresiones [5.1]-[5.3] del paso 4 para cualquier valor del horizonte $l \geq 1$:

$$\begin{aligned} Y_N(1) &= \mu + \phi_1 Y_N\,, \\ Y_N(l) &= \mu + \phi_1 Y_N(l-1) \text{ para } l \geq 2. \end{aligned} \quad [6]$$

La expresión [6] es la **función de previsión** de un modelo AR(1), que también se puede escribir como

$$Y_N(l) = \left(\sum_{i=0}^{l-1} \phi_1^i\right)\mu + \phi_1^l Y_N \text{ para todo } l \geq 1. \quad [7]$$

Cuando $|\phi_1| < 1$, $Y_N(l) \to \frac{\mu}{1-\phi_1}$ (la media teórica de un AR(1) estacionario).

6. Particularizar y simplificar los errores de previsión en [2] para $l = 1, 2, 3, ...$, teniendo en cuenta [4] para Y_{N+l} y [6] para $Y_N(l)$:

$l = 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N^Y(1) &= Y_{N+1} - Y_N(1) \\ &= \mu + \phi_1 Y_N + A_{N+1} - [\mu + \phi_1 Y_N] = A_{N+1}\,. \end{aligned} \quad [8.1]$$

$l = 2$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N^Y(2) &= Y_{N+2} - Y_N(2) \\ &= \mu + \phi_1 Y_{N+1} + A_{N+2} - [\mu + \phi_1 Y_N(1)] \\ &= \phi_1[Y_{N+1} - Y_N(1)] + A_{N+2} = \phi_1 \mathcal{E}_N^Y(1) + A_{N+2} \\ &= A_{N+2} + \phi_1 A_{N+1}\,. \end{aligned} \quad [8.2]$$

$l = 3$

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_N^Y(3) &= Y_{N+3} - Y_N(3) \\ &= \mu + \phi_1 Y_{N+2} + A_{N+3} - [\mu + \phi_1 Y_N(2)] \\ &= \phi_1[Y_{N+2} - Y_N(2)] + A_{N+3} = \phi_1 \mathcal{E}_N^Y(2) + A_{N+3} \\ &= A_{N+3} + \phi_1 A_{N+2} + \phi_1^2 A_{N+1}\,. \end{aligned} \quad [8.3]$$

...

7. Generalizar las expresiones [8.1]-[8.3] del paso 6 para cualquier valor del horizonte $l \geq 1$:

$$\mathcal{E}_N^Y(1) = A_{N+1}, \qquad [9]$$
$$\mathcal{E}_N^Y(l) = \phi_1 \mathcal{E}_N^Y(l-1) + A_{N+l} \text{ para } l \geq 2,$$

o bien:

$$\mathcal{E}_N^Y(l) = \textstyle\sum_{i=0}^{l-1} \phi_1^i A_{N+l-i} \text{ para todo } l \geq 1. \qquad [10]$$

Por lo tanto, los errores de previsión tienen esperanza cero y varianza:

$$v(l) = \left(\textstyle\sum_{i=0}^{l-1} \phi_1^{2i} \right) \sigma_A^2 \text{ para todo } l \geq 1. \qquad [11]$$

Cuando $|\phi_1| < 1$, $v(l) \to \frac{\sigma_A^2}{1-\phi_1^2}$ (la varianza teórica de un AR(1) estacionario).

En relación con [10]-[11], nótese que en la representación PSI (MA) de un modelo AR(1) ocurre que $\psi_i = \phi_1^i$ $(i = 0, 1, 2, ...)$.

Conclusiones Generales Importantes:

(1) En cualquier modelo estacionario, la función de previsión converge a la media (esperanza) teórica del modelo.

(2) Los errores de previsión y sus varianzas pueden expresarse en cualquier modelo ARIMA (estacionario o no estacionario) como

$$\mathcal{E}_N^Y(l) = \textstyle\sum_{i=0}^{l-1} \psi_i A_{N+l-i} \text{ para todo } l \geq 1, \qquad [12]$$
$$v(l) = \left(\textstyle\sum_{i=0}^{l-1} \psi_i^2 \right) \sigma_A^2 \text{ para todo } l \geq 1 \left[\Rightarrow v(1) = \sigma_A^2 \right],$$

por lo que (3) los errores de previsión siempre tienen esperanza cero, (4) en cualquier modelo estacionario ($\psi_i \to 0$) las varianzas de los errores de previsión convergen a la varianza teórica del modelo, y (5) en modelos no estacionarios las varianzas de los errores de previsión crecen de manera ilimitada (divergen) con el horizonte de previsión.

EJEMPLO - La Función de Previsión de un Modelo MA(1):

1. Escribir el modelo dejando en su lado izquierdo solamente Y_t:

$$Y_t = \mu + A_t - \theta_1 A_{t-1}. \qquad [13]$$

2. Escribir la expresión [13] del paso 1 en $t = N + l$:

$$Y_{N+l} = \mu + A_{N+l} - \theta_1 A_{N+l-1}\,. \qquad [14]$$

3. Aplicar $\mathrm{E}_N[\,\cdot\,]$ a la expresión [14] del paso 2 para obtener $Y_N(l)$ en [1]:

$$Y_N(l) = \mu + \mathrm{E}_N[A_{N+l}] - \theta_1 \mathrm{E}_N[A_{N+l-1}]. \qquad [15]$$

4. Particularizar y desarrollar la expresión [15] del paso 3 para $l = 1, 2, 3, \ldots$:

$l = 1$: $$Y_N(1) = \mu + \underbrace{\mathrm{E}_N[A_{N+1}]}_{0\ \text{(R4)}} - \theta_1 \underbrace{\mathrm{E}_N[A_N]}_{A_N\ \text{(R2)}} = \mu - \theta_1 A_N\,. \qquad [15.1]$$

$l = 2$: $$Y_N(2) = \mu + \underbrace{\mathrm{E}_N[A_{N+2}]}_{0\ \text{(R4)}} - \theta_1 \underbrace{\mathrm{E}_N[A_{N+1}]}_{0\ \text{(R4)}} = \mu. \qquad [15.2]$$

$l = 3$: $$Y_N(3) = \mu + \underbrace{\mathrm{E}_N[A_{N+3}]}_{0\ \text{(R4)}} - \theta_1 \underbrace{\mathrm{E}_N[A_{N+2}]}_{0\ \text{(R4)}} = \mu. \qquad [15.3]$$

...

5. Generalizar las expresiones [15.1]-[15.3] del paso 4 para cualquier valor del horizonte $l \geq 1$:

$$Y_N(1) = \mu - \theta_1 A_N\,,\ Y_N(l) = \mu \ \text{ para } \ l \geq 2. \qquad [16]$$

EJEMPLO - Previsión con un Paseo Aleatorio:

Considerando un Paseo Aleatorio como un modelo AR(1) con $\phi_1 = 1$,

$$Y_t = \mu + Y_{t-1} + A_t\,,$$

los resultados principales del ejemplo sobre el modelo AR(1), particularizados para este caso ($\phi_1 = 1$), son los siguientes:

[7] $\Rightarrow$ $$Y_N(l) = \left(\textstyle\sum_{i=0}^{l-1} 1^i\right)\mu + Y_N = l\mu + Y_N \ \text{ para todo } \ l \geq 1,$$

[11] $\Rightarrow$ $$v(l) = \left(\textstyle\sum_{i=0}^{l-1} 1^{2i}\right)\sigma_A^2 = l\,\sigma_A^2 \ \text{ para todo } \ l \geq 1.$$

La Función de Previsión de un Modelo ARIMA:

$$\phi(B)\Phi(B^S)[\nabla^d\nabla_S^D Y_t - \mu_W] = \theta(B)\Theta(B)A_t. \quad [17.1]$$

$$\Phi^*(B)Y_t = \mu + \Theta^*(B)A_t, \quad [17.2]$$

$$\begin{gathered}\Phi^*(B) = \phi(B)\Phi(B^S)\nabla^d\nabla_S^D = 1 - \textstyle\sum_{i=1}^{p^*}\Phi_i^*B^i, \text{ con} \\ p^* = (p+d) + (P+D)\times S,\end{gathered} \quad [17.2.1]$$

$$\begin{gathered}\Theta^*(B) = \theta(B)\Theta(B^S) = 1 - \textstyle\sum_{i=1}^{q^*}\Theta_i^*B^i, \text{ con} \\ q^* = q + Q\times S,\end{gathered} \quad [17.2.2]$$

$$\mu = [\phi(1)\Phi(1)]\times\mu_W. \quad [17.2.3]$$

[17.2] $\Rightarrow$
$$Y_t = \mu + \textstyle\sum_{i=1}^{p^*}\Phi_i^*Y_{t-i} + A_t - \sum_{i=1}^{q^*}\Theta_i^*A_{t-i}. \quad [17.3]$$

[17.3] $\Rightarrow$
$$Y_{N+l} = \mu + \textstyle\sum_{i=1}^{p^*}\Phi_i^*Y_{N+l-i} + A_{N+l} - \sum_{i=1}^{q^*}\Theta_i^*A_{N+l-i}. \quad [18]$$

[18] $\Rightarrow$
$$\begin{aligned}Y_N(l) = \mathrm{E}_N[Y_{N+l}] = \mu + \textstyle\sum_{i=1}^{p^*}\Phi_i^*\mathrm{E}_N[Y_{N+l-i}] + \mathrm{E}_N[A_{N+l}] \\ - \textstyle\sum_{i=1}^{q^*}\Theta_i^*\mathrm{E}_N[A_{N+l-i}]\ (l = 1, 2, ...),\end{aligned} \quad [19]$$

con:

$$\begin{aligned}&\mathrm{R1}: \ \mathrm{E}_N[Y_j] = Y_j \ \text{ si } \ j \le N, \\ &\mathrm{R2}: \ \mathrm{E}_N[A_j] = A_j \ \text{ si } \ j \le N, \\ &\mathrm{R3}: \ \mathrm{E}_N[Y_j'] = Y_N'(j-N) \ \text{ si } \ j > N, \\ &\mathrm{R4}: \ \mathrm{E}_N[A_j] = \mathrm{E}[A_j] = 0 \ \text{ si } \ j > N.\end{aligned} \quad [20]$$

2. PREVISIÓN CON MODELOS ARIMA - CÁLCULOS

EJEMPLO - Cálculo de Previsiones Puntuales con un Modelo AR(1):

[6] $\Rightarrow$
$$\hat{y}_N(1) = \hat{\mu} + \hat{\phi}_1 y_N, \ \hat{y}_N(l) = \hat{\mu} + \hat{\phi}_1\hat{y}_N(l-1) \text{ para } l \ge 2.$$

EJEMPLO - Cálculo de Previsiones Puntuales con un Modelo MA(1):

[16] $\Rightarrow$
$$\hat{y}_N(1) = \hat{\mu} - \hat{\theta}_1\hat{a}_N, \ \hat{y}_N(l) = \hat{\mu} \text{ para } l \ge 2.$$

Cálculo de Previsiones Puntuales con un Modelo ARIMA:

$$[19] \Rightarrow \quad \begin{aligned} \hat{y}_N(l) = \hat{\mathrm{E}}_N[Y_{N+l}] &= \hat{\mu} + \textstyle\sum_{i=1}^{p^*} \hat{\Phi}_i^* \hat{\mathrm{E}}_N[Y_{N+l-i}] + \hat{\mathrm{E}}_N[A_{N+l}] \\ &\quad - \textstyle\sum_{i=1}^{q^*} \hat{\Theta}_i^* \hat{\mathrm{E}}_N[A_{N+l-i}] \ (l = 1, 2, \ldots), \end{aligned} \qquad [21]$$

con:

$$[20] \Rightarrow \quad \begin{aligned} &\widehat{\mathrm{R1}} : \ \hat{\mathrm{E}}_N[Y_j] = y_j \ \text{ si } \ j \leq N, \\ &\widehat{\mathrm{R2}} : \ \hat{\mathrm{E}}_N[A_j] = \hat{a}_j \ \text{ si } \ j \leq N, \\ &\widehat{\mathrm{R3}} : \ \hat{\mathrm{E}}_N[Y_j] = \hat{y}_N(j-N) \ \text{ si } \ j > N, \\ &\widehat{\mathrm{R4}} : \ \hat{\mathrm{E}}_N[A_j] = 0 \ \text{ si } \ j > N. \end{aligned}$$

Varianzas Estimadas de los Errores de Previsión:

$$[12] \Rightarrow \quad \hat{v}(l) = \left(\textstyle\sum_{i=0}^{l-1} \hat{\psi}_i^2 \right) \hat{\sigma}_A^2 \ \text{ para todo } \ l \geq 1 \left[\Rightarrow \hat{v}(1) = \hat{\sigma}_A^2 \right]. \qquad [22]$$

Estimación de Intervalos de Confianza y Probabilidades:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathrm{IC}}_{95\%}[Y_{N+l}] &= \left[\hat{y}_N(l) \mp 1.96\sqrt{\hat{v}(l)} \right], \\ \widehat{\Pr}[Y_{N+l} \leq b] &= \Pr\left[\mathrm{N}(0,1) \leq \frac{b - \hat{y}_N(l)}{\sqrt{\hat{v}(l)}} \right] \ (l = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \qquad [23]$$

Cálculos referidos a la Transformación Logarítmica:

Si una serie original x_t requiere una transformación logarítmica para estabilizar su dispersión, entonces los cálculos en [21]-[23] se refieren a la serie $y_t = \ln(x_t)$. Por lo tanto, cada previsión puntual para la serie original $x_t = \exp\{y_t\}$ (con $\exp\{y_t\} = e^{y_t}$) se puede calcular simplemente como $\hat{x}_N(l) = \exp\{\hat{y}_N(l)\}$, y el intervalo de confianza correspondiente como $\left[\exp\left\{ \hat{y}_N(l) - 1.96\sqrt{\hat{v}(l)} \right\}, \exp\left\{ \hat{y}_N(l) + 1.96\sqrt{\hat{v}(l)} \right\} \right]$, que no es simétrico con respecto a $\hat{x}_N(l)$. Un intervalo de confianza que sí es simétrico puede calcularse como $\left[\hat{x}_N(l) \mp 1.96\sqrt{\hat{w}(l)} \right]$, donde $\hat{w}(l) = \hat{x}_N(l)^2 \times \hat{v}(l)$ es una aproximación [*] a la varianza estimada del error de previsión asociado con la serie x_t original:

$$\begin{aligned} \hat{x}_N(l) = \exp\{\hat{y}_N(l)\}&, \ \hat{w}(l) = \hat{x}_N(l)^2 \times \hat{v}(l), \\ \widehat{\mathrm{IC}}_{95\%}[X_{N+l}] &= \left[\hat{x}_N(l) \mp 1.96\sqrt{\hat{w}(l)} \right], \\ \widehat{\Pr}[X_{N+l} \leq b] &= \Pr\left[\mathrm{N}(0,1) \leq \frac{b - \hat{x}_N(l)}{\sqrt{\hat{w}(l)}} \right] \ (l = 1, 2, \ldots). \end{aligned}$$

[*] Una aproximación de Taylor de grado 1 (lineal) a la función $\ln(x)$ alrededor de x_0 proporciona lo siguiente:

$$\ln(x) \cong \ln(x_0) + \frac{d\ln(x_0)}{dx}(x - x_0) = \ln(x_0) + \frac{1}{x_0}(x - x_0), \text{ o bien}$$

$$x - x_0 \cong x_0 \times [\ln(x) - \ln(x_0)].$$

Con $x = X_{N+l}$, $x_0 = X_N(l)$, la expresión anterior implica que

$$\underbrace{X_{N+l} - X_N(l)}_{\mathcal{E}_N^X(l)} \cong X_N(l) \times \{ \underbrace{\overbrace{\ln(X_{N+l})}^{Y_{N+l}} - \overbrace{\ln[X_N(l)]}^{Y_N(l)}}_{\mathcal{E}_N^Y(l)} \}.$$

Por lo tanto,

$$\hat{\text{Var}}\left[\mathcal{E}_N^X(l)\right] \cong \hat{x}_N(l)^2 \times \underbrace{\hat{\text{Var}}\left[\mathcal{E}_N^Y(l)\right]}_{\hat{v}(l)} = \hat{x}_N(l)^2 \times \hat{v}(l) = \hat{w}(l).$$

3. EJEMPLO 1 - ST17 : Y = BJRA

MODELO M1: ARMA(1,1) CON MEDIA (TÉRMINO CONSTANTE)

Dependent Variable: Y
Method: Least Squares
Sample(adjusted): 2 197
Included observations: 196 after adjusting endpoints
Convergence achieved after 11 iterations
Backcast: 1

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	17.11141	0.110643	154.6537	0.0000
AR(1)	0.917624	0.041351	22.19102	0.0000
MA(1)	-0.608054	0.081951	-7.419684	0.0000

R-squared	0.391229	Mean dependent var	17.06276
Adjusted R-squared	0.384920	S.D. dependent var	0.400244
S.E. of regression	0.313900	Akaike info criterion	0.535700
Sum squared resid	19.01686	Schwarz criterion	0.585876
Log likelihood	-49.49864	F-statistic	62.01609
Durbin-Watson stat	1.875472	Prob(F-statistic)	0.000000

$$\underset{(0.041351)}{(1 - 0.917624B)}\ \underset{(0.11064)}{(y_t - 17.11141)} = \underset{(0.081951)}{(1 - 0.608054B)}\ \hat{a}_t,$$

$$n = 196,\ \hat{\sigma}_A = 0.3139,\ \text{AIC} = 0.5357,\ \text{BIC} = 0.5859.$$

MODELO M2: IMA(1,1)

Dependent Variable: D(Y)				
Method: Least Squares				
Sample(adjusted): 2 197				
Included observations: 196 after adjusting endpoints				
Convergence achieved after 11 iterations				
Backcast: 1				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
MA(1)	-0.702478	0.051036	-13.76448	0.0000

R-squared	0.264356	Mean dependent var	0.002041
Adjusted R-squared	0.264356	S.D. dependent var	0.370303
S.E. of regression	0.317607	Akaike info criterion	0.549087
Sum squared resid	19.67052	Schwarz criterion	0.565812
Log likelihood	-52.81057	Durbin-Watson stat	1.798177

$$\nabla y_t = \underset{(0.051036)}{(1 - 0.702478B)} \quad \hat{a}_t\,,$$

$$n = 196,\ \hat{\sigma}_A = 0.3176,\ \text{AIC} = 0.5491,\ \text{BIC} = 0.5658.$$

MODELO M1

$$(1-\phi_1 B)(Y_t - \mu_Y) = (1-\theta_1 B)A_t \Leftrightarrow Y_t = [\,(1-\phi_1)\mu_Y] + \phi_1 Y_{t-1} + A_t - \theta_1 A_{t-1}\,.$$

$$y_t = 1.40957 + 0.917624 \times y_{t-1} + \hat{a}_t - 0.608054 \times \hat{a}_{t-1}\,.$$

$$\begin{aligned} Y_{197}(1) &= \mathrm{E}_{197}[Y_{198}] = \\ &= \mu + \phi_1 \mathrm{E}_{197}[Y_{197}] + \mathrm{E}_{197}[A_{198}] - \theta_1 \mathrm{E}_{197}[A_{197}] = \mu + \phi_1 Y_{197} - \theta_1 A_{197}\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{197}(1) &= \hat{\mathrm{E}}_{197}[Y_{198}] = \hat{\mu} + \hat{\phi}_1 \times y_{197} - \hat{\theta}_1 \times \hat{a}_{197} \\ &= 1.40957 + 0.917624 \times 17.4 - 0.608054 \times (-0.034957) = 17.39748. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{197}(2) &= \mathrm{E}_{197}[Y_{199}] = \\ &= \mu + \phi_1 \mathrm{E}_{197}[Y_{198}] + \mathrm{E}_{197}[A_{199}] - \theta_1 \mathrm{E}_{197}[A_{198}] = \mu + \phi_1 Y_{197}(1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{197}(2) &= \hat{\mathrm{E}}_{197}[Y_{199}] = \hat{\mu} + \hat{\phi}_1 \times \hat{y}_{197}(1) \\ &= 1.40957 + 0.917624 \times 17.39748 = 17.37392. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{197}(3) &\equiv \mathrm{E}_{197}[Y_{200}] = \\ &= \mu + \phi_1 \mathrm{E}_{197}[Y_{199}] + \mathrm{E}_{197}[A_{200}] - \theta_1 \mathrm{E}_{197}[A_{199}] = \mu + \phi_1 Y_{197}(2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{y}_{197}(3) &\equiv \hat{\mathrm{E}}_{197}[Y_{200}] = \hat{\mu} + \hat{\phi}_1 \times \hat{y}_{197}(2) \\ &= 1.40957 + 0.917624 \times 17.37392 = 17.35229. \end{aligned}$$

MODELO M2

$$\nabla Y_t = (1-\theta_1 B)A_t \Leftrightarrow Y_t = Y_{t-1} + A_t - \theta_1 A_{t-1}\,.$$

$$y_t = y_{t-1} + \hat{a}_t - 0.702478 \times \hat{a}_{t-1}\,.$$

$$\begin{aligned} Y_{197}(1) &= \mathrm{E}_{197}[Y_{198}] = \\ &= \mathrm{E}_{197}[Y_{197}] + \mathrm{E}_{197}[A_{198}] - \theta_1 \mathrm{E}_{197}[A_{197}] = Y_{197} - \theta_1 A_{197}\,. \end{aligned}$$

$$\hat{y}_{197}(1) = \hat{\mathrm{E}}_{197}[Y_{198}] = y_{197} - \hat{\theta}_1 \times \hat{a}_{197} = 17.4 - 0.702478 \times (-0.149070) = 17.50472.$$

$$\begin{aligned} Y_{197}(2) &= \mathrm{E}_{197}[Y_{199}] = \\ &= \mathrm{E}_{197}[Y_{198}] + \mathrm{E}_{197}[A_{199}] - \theta_1 \mathrm{E}_{197}[A_{198}] = Y_{197}(1). \end{aligned}$$

$$\hat{y}_{197}(2) = \hat{\mathrm{E}}_{197}[Y_{199}] = \hat{y}_{197}(1) = 17.50472.$$

$$\begin{aligned} Y_{197}(3) &= \mathrm{E}_{197}[Y_{200}] = \\ &= \mathrm{E}_{197}[Y_{199}] + \mathrm{E}_{197}[A_{200}] - \theta_1 \mathrm{E}_{197}[A_{199}] = Y_{197}(2). \end{aligned}$$

$$\hat{y}_{197}(3) = \hat{\mathrm{E}}_{197}[Y_{200}] = \hat{y}_{197}(2) = 17.50472.$$

4. CRITERIOS DE EVALUACIÓN DE PREVISIONES

$$\begin{array}{c} \text{Muestra} \\ \text{disponible} \\ \text{completa} \end{array} \left[\begin{array}{l} \begin{array}{c} \text{Muestra} \\ \text{de} \\ \text{modelización} \end{array} \left[\begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{array} \right] \longrightarrow \text{Modelo} \longrightarrow \text{Previsiones: } \hat{y}_N(1), \ldots, \hat{y}_N(L). \\ \\ \begin{array}{c} \text{Muestra} \\ \text{de} \\ \text{previsión} \end{array} \left[\begin{array}{ccccc} y_{N+1} & - & \hat{y}_N(1) & = & \hat{e}_N(1) \\ y_{N+2} & - & \hat{y}_N(2) & = & \hat{e}_N(2) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ y_{N+L} & - & \hat{y}_N(L) & = & \hat{e}_N(L) \end{array} \right] \longrightarrow \text{Errores: } \hat{e}_N(1), \ldots, \hat{e}_N(L). \end{array} \right.$$

Root Mean Squared Error:

$$RMSE = \sqrt{\tfrac{1}{L}\textstyle\sum_{l=1}^{L} \hat{e}_N(l)^2}\,. \qquad [24]$$

Mean Absolute Error:

$$MAE = \tfrac{1}{L}\textstyle\sum_{l=1}^{L} |\hat{e}_N(l)|\,. \qquad [25]$$

Mean Absolute Percentage Error:

$$MAPE = 100 \times \left(\tfrac{1}{L}\textstyle\sum_{l=1}^{L} \left| \frac{\hat{e}_N(l)}{y_{N+l}} \right| \right). \qquad [26]$$

5. EJEMPLO 2 - ST14 : Y = LOG(VIVIN) 1989:01 1999:12

MODELO M1: ARI(2,1)×IMA(1,1)$_{12}$

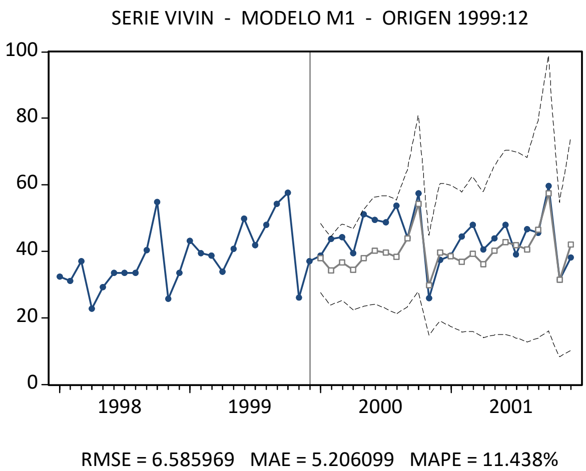
$$
\begin{aligned}
(1 + \underset{(0.0831)}{0.5404}B + \underset{(0.0831)}{0.4583}B^2)\nabla\nabla_{12}\, y_t &= (1 - \underset{(0.0242)}{0.8809}B^{12})\hat{a}_t\,, \\
n = 117,\ \hat{\sigma}_A = 0.1359,\ \text{AIC} &= -1.1282,\ \text{BIC} = -1.0574.
\end{aligned}
$$

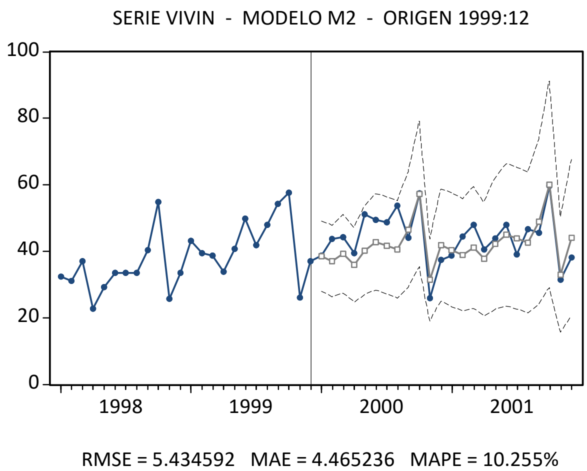
MODELO M2: IMA(1,1)×IMA(1,1)$_{12}$

$$
\begin{aligned}
\nabla\nabla_{12}\, y_t &= (1 - \underset{(0.0700)}{0.6753}B)\ (1 - \underset{(0.0236)}{0.8918}B^{12})\hat{a}_t\,, \\
n = 119,\ \hat{\sigma}_A = 0.1371,\ \text{AIC} &= -1.1194,\ \text{BIC} = -1.0727.
\end{aligned}
$$

$$
\nabla\nabla_{12} = (1 - B)(1 - B^{12}) = 1 - B - B^{12} + B^{13},
$$

$$
y_t = y_{t-1} + y_{t-12} - y_{t-13} + \hat{a}_t - 0.6753\hat{a}_{t-1} - 0.8918\hat{a}_{t-12} + 0.6022\hat{a}_{t-13}\,.
$$





OPERACIONES CON EVIEWS

Introducción al Uso de EViews 4.1 (2021 J.A.M.): Sección 19 pp. 105-107.